Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

3. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Montag 30.10., 17 Uhr (!!!)

Aufgabe 1 (Satz von de Moivre-Laplace).

a) Formulieren Sie die Aussage des Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace, und skizzieren Sie den Beweis. Die Beweisskizze sollte alle wesentlichen Approximationsschritte enthalten - Sie brauchen die einzelnen Schritte aber nicht vollständig rigoros auszuführen.

b) Ein Hotel hat 200 Betten. Wie viele Reservierungen darf der Hotelmanager akzeptieren, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit 20 % Wahrscheinlichkeit annulliert wird, und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens $2,5$ % sein soll?

Aufgabe 2 (Normalverteilung). Sei Z eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable.

a) Die Verteilung von $Y := e^Z$ heißt *log-Normal-Verteilung*. Zeigen Sie, dass diese Verteilung absolutstetig ist, und berechnen Sie die Dichte.

b) Beweisen Sie die Abschätzung

$$P[Z \geq x] \;\leq\; \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Aufgabe 3 (Transformationen von absolutstetigen Verteilungen).

a) Sei Z eine mit den Parametern m und σ^2 normalverteilte Zufallsvariable, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $X := aZ + b$ die Verteilung $N(am + b, a^2\sigma^2)$ hat. Welche Verteilung hat X im Fall $a = 0$?

b) Im Abstand a von einer Geraden befinde sich eine Glühbirne, die gleichmäßig in alle Richtungen strahlt, die die Gerade irgendwann treffen. X bezeichne den Auftreffpunkt eines Lichtstrahls auf der Geraden. Der Punkt auf der Geraden, der der Glühbirne am nächsten liegt, sei mit $x = 0$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Verteilung von X absolutstetig ist mit Dichtefunktion

$$f_X(x) \;=\; \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \;.$$

Diese Verteilung wird als *Cauchyverteilung zum Parameter* a bezeichnet.

Aufgabe 4 (Wartezeiten). Eine Folge von Ereignissen trete zu zufälligen Zeitpunkten ein. Wir nehmen an, dass die Anzahl der Ereignisse, die sich bis zur Zeit $t > 0$ ereignen, durch eine Poisson(λt)-verteilte Zufallsvariable N_t beschrieben wird, wobei $\lambda > 0$ ein fester Parameter ist. (Wofür und weshalb ist das eine sinnvolle Modellierungsannahme ?)

a) Sei T_k der Zeitpunkt, zu dem das k-te Ereignis eintritt. Zeigen Sie: T_k ist eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_k(t) \;=\; 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \qquad t \geq 0.$$

b) Folgern Sie, dass die Verteilung von T_k absolutstetig ist mit Dichte

$$f_k(t) \;=\; \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\, t^{k-1} e^{-\lambda t}\, 1_{(0,\infty)}(t).$$

Skizzieren Sie die Dichten f_0, f_1, f_2 und f_3 in einer Abbildung. Die Verteilung von T_k heißt *Gamma-Verteilung mit Parametern λ und k.*

c) Analog können wir die Verteilung von Wartezeiten für Ereignisse bestimmen, die zu diskreten Zeitpunkten eintreten. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ trete unabhängig voneinander ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ ein. Erneut sei T_k der Zeitpunkt des Eintretens des k-ten Ereignisses. Zeigen Sie, dass T_k eine diskrete Zufallsvariable mit Massenfunktion

$$p_k(k+n) \;=\; \binom{k+n-1}{n} p^k (1-p)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

ist. Wie ist der Zusammenhang mit dem Modell in stetiger Zeit ?

Aufgabe 5 (Zufallsvariablen,Verteilungsfunktion).

a) Seien $X, Y, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass auch die folgenden Abbildungen Zufallsvariablen sind:

$$X \cdot Y, \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \qquad \liminf_{n \to \infty} X_n \;.$$

Folgern Sie, dass die Menge $M = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existiert}\}$ messbar ist.

b) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen der folgenden Zufallsvariablen:

$$Y_1 = aX + b, \qquad Y_2 = |X|, \qquad Y_3 = e^X.$$