Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

2. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Dienstag 24.10., 15 Uhr,
Postfächer gegenüber der Fachbibliothek Mathematik

Aufgabe 1 (Verteilungsfunktionen und Simulation von reellwertigen Zufallsvariablen). Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(c) \;:=\; P[X \leq c] \;=\; P[X^{-1}((-\infty, c])], \quad c \in \mathbb{R},$$

heißt *Verteilungsfunktion* von X.

a) Zeige : F ist monoton wachsend und rechtsstetig mit

$$\lim_{c \to -\infty} F(c) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{c \to \infty} F(c) \;=\; 1\,.$$

b) Sei $\mathcal{U}_{(0,1)}$ die Gleichverteilung auf $(0,1)$. Wie sieht der Graph von F aus, falls die Verteilung von X gleich $\frac{1}{2}\mathcal{U}_{(0,1)} + \frac{1}{2}\delta_2$ ist ?

c) Für $u \in (0,1)$ sei

$$G(u) \;:=\; \inf\{c \in \mathbb{R} : F(c) \geq u\} \;=\; \sup\{c \in \mathbb{R} : F(c) < u\}$$

die *„linksstetige verallgemeinerte Inverse"* von F. Skizziere G für das Beispiel aus b). Zeige allgemein, daß G eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \mathcal{U}_{(0,1)})$$

ist, die dieselbe Verteilung wie X unter P hat. (*Ein Element $u \in (0,1)$ repräsentiert z.B. eine vom Computer erzeugte „Zufallszahl". Die Transformation $u \mapsto G(u)$ liefert eine Möglichkeit, die Zufallsvariable X auf dem Computer zu simulieren.*)

Aufgabe 2 (Verteilungsfunktionen II).

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilungsfunktion

$$F(c) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } c < -1, \\ 1-p & \text{für } -1 \leq c < 0, \\ 1-p+\frac{1}{2}cp & \text{für } 0 \leq c \leq 2, \\ 1 & \text{für } c > 2. \end{cases}$$

Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P[X=-1],\ P[X=0]$ und $P[X \geq 1]$.

b) Sei nun F die Verteilungsfunktion einer beliebigen reellwertigen Zufallsvariable X. Bestimme die Verteilungsfunktionen der folgenden Zufallsvariablen in Abhängigkeit von F:

$$X^+ \;=\; \max(X,0), \qquad X^- \;=\; -\min(X,0), \qquad |X|.$$

Aufgabe 3 (σ-Algebren).

a) Sei Ω eine nichtleere Menge, und $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeige, dass $\sigma(\mathcal{J})$ eine σ-Algebra ist.

b) Folgere, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alle abgeschlossenen und halboffenen Intervalle enthält.

c) Zeige $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \;=\; \sigma\left(\,(-\infty,c] : c \in \mathbb{R}\,\right)$.

d) Wie sieht ein möglichst einfaches Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ aus ?

Aufgabe 4 (Stichproben und elementare Verteilungen).

a) Eine Lieferung enthält 90 funktionsfähige und 10 defekte Notebooks. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe von 10 Notebooks kein defektes enthält ?

b) Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn stattdessen zehnmal unabhängig eine Einzelstichprobe entnommen wird ? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zweien dieser Einzelstichproben derselbe Laptop geprüft wird ?

c) Eine große Anzahl n verschiedener Briefe wird zufällig vermischt und auf n voradressierte Briefumschläge verteilt. Wie groß ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest einer der Briefe den richtigen Empfänger erreicht ?

Aufgabe 5 ([Zusatzaufgabe] Eine nicht meßbare Teilmenge von S^1).
Sei $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Betrachte die Äquivalenzklassen auf S^1 bzgl. der Relation

$$z \sim w \qquad \Leftrightarrow \qquad z = e^{i\alpha}w \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{Q}\ .$$

Folgere aus dem Auswahlaxiom die Existenz von disjunkten Mengen A_q, $q \in \mathbb{Q}$, die alle auseinander durch Rotation um den Ursprung hervorgehen, so daß

$$S^1 \;=\; \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q\,.$$

Erkläre, warum die Existenz einer rotationsinvarianten Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{B}(S^1)$ impliziert, daß die Mengen A_q nicht Borelsch sind.

Bemerkung: Das Banach-Tarski-Paradox besagt, daß eine Teilmenge F der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ existiert, sodaß sich S^2 für jedes $3 \leq k \leq \infty$ als disjunkte Vereinigung von k Mengen schreiben läßt, die alle durch Rotation von F um den Nullpunkt entstehen !