

## 15. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie“

Musterlösungen werden ab 10.2. auf der Vorlesungshomepage bereitgestellt

---

1. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  habe die Dichte

$$f(x, y) = cx(y - x)e^{-y}, \quad 0 \leq x \leq y < \infty.$$

Bestimmen Sie  $c$  und zeigen Sie

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= 6x(y - x)y^{-3}, \quad 0 \leq x \leq y, \\ f_{Y|X}(y|x) &= (y - x)e^{x-y}, \quad 0 \leq x \leq y < \infty. \end{aligned}$$

2. Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige, auf  $(0, 1)$  gleichverteilte Zufallsvariablen.

a) Berechnen Sie die Dichtefunktionen von  $X_1 + X_2$  und  $X_1 + X_2 + X_3$ .

b) Zeigen Sie, dass die Dichte von  $\sum_{r=1}^n X_r$  auf  $(0, n)$  ein Polynom vom Grad  $n - 1$  ist.

3. Es seien  $X$  und  $Y$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass  $U := X + Y$  und  $V := X - Y$  unkorreliert, aber nicht notwendigerweise unabhängig sind. Zeigen Sie, dass  $U$  und  $V$  unabhängig sind, falls  $X$  und  $Y$   $N(0, 1)$ -verteilt sind.

4. Sei  $X$  eine Cauchyverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass auch  $1/X$  die Cauchyverteilung besitzt. Finden sie eine andere, nichttriviale Verteilung mit dieser Invarianzeigenschaft.

5. Es sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor. Zeigen Sie, dass  $Y := \sum_{i=1}^n a_i X_i$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$  die  $N(m, \sigma^2)$ -Verteilung besitzt, wobei

$$m := \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[X_i], \quad \sigma^2 := \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \text{Cov}[X_i, X_j]$$

6. Seien  $X$  und  $Y$  unabhängige,  $\Gamma(\lambda, \alpha)$  bzw.  $\Gamma(\lambda, \beta)$ -verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass  $W := X + Y$  und  $Z := X/(X + Y)$  unabhängig sind, und dass  $Z$  Beta-verteilt ist mit Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ . Dabei ist die *Beta-Verteilung* gegeben durch die Verteilungsdichte

$$f(x) := \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1}, \quad x \in [0, 1].$$

7. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sei eine bivariate Normalverteilung mit der Dichte

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right).$$

Sei  $Z = \min\{X, Y\}$ . Zeigen Sie :  $\mathbb{E}[Z] = \sqrt{(1-\rho)/\pi}$  ,  $\mathbb{E}[Z^2] = 1$  .

8. Sei  $X$  eine nichtnegative Zufallsvariable. Zeigen Sie :

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_0^{\infty} r x^{r-1} \mathbb{P}[X > x] dx ,$$

für jedes  $r \geq 1$ .

9. Sei  $X$  eine integrierbare Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion  $F$ . Zeigen Sie :

$$\int_{-\infty}^a F(x) dx = \int_a^{\infty} (1 - F(x)) dx \quad \text{genau dann, wenn } a = \mathbb{E}[X].$$

10. Sei  $X$  gleichverteilt auf  $(0, 1)$ . Finden Sie eine Funktion  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $Y = g(X)$  exponentialverteilt ist zum Parameter  $\lambda$ .

11. Seien  $X, Y, Z$  unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern  $\lambda, \mu, \nu$ . Berechnen Sie  $\mathbb{P}[X < Y < Z]$ .

12. Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer zum Parameter  $\lambda > 0$  exponentialverteilten Zufallsvariable.