Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

14. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Aufgabe 1 (Schwache Konvergenz und Konvergenz in Verteilung).

a) Zeigen Sie, dass jede schwach konvergente Folge $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ straff ist.

b) Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes von Cramér-Wold aus der Vorlesung. Dabei können Sie ohne Beweis voraussetzen, dass jede straffe Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$ eine schwach konvergente Teilfolge hat.

Aufgabe 2 (Hoeffding-Ungleichung).
Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X_i] = m$. Es gelte

$$A \;\leq\; X_i(\omega) \;\leq B \qquad \forall\, \omega \in \Omega,\; 1 \leq i \leq n\,.$$

mit endlichen Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Für $t \in \mathbb{R}$ sei P_t die bzgl. P absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Dichte

$$\rho_t(\omega) \;=\; e^{tX_1}(\omega) \,/\, E[e^{tX_1}]\;. \qquad\qquad \text{Zeigen Sie:}$$

a) Die logarithmische momentenerzeugende Funktion $\Lambda(t)$ der X_i ist zweimal differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \Lambda'(t) &= E_{P_t}[X_1] && (\text{ Erwartungswert von } X_1 \text{ bzgl. } P_t \text{), und} \\ \Lambda''(t) &= \mathrm{var}_{P_t}[X_1] && (\text{ Varianz von } X_1 \text{ bzgl. } P_t \text{).} \end{aligned}$$

b) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Lambda''(t) \;\leq\; \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \Lambda(t) \;\leq\; mt + \frac{(B-A)^2}{8}\, t^2\,.$$

c) Für die großen Abweichungen vom Gesetz der großen Zahlen ergibt sich folgende obere Schranke (*Hoeffding 1963*):

$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq m + \varepsilon\right] \;\leq\; e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(B-A)^2}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \varepsilon > 0.$$

Aufgabe 3 (Entropiemaximierung unter Nebenbedingungen). Sei S ein endlicher Zustandsraum, und $H(\mu) = -\sum_{\mu(x)>0} \mu(x) \log \mu(x)$ das Entropiefunktional auf dem Raum

$$\mathrm{WV}(S) \;=\; \left\{ \mu \in \mathbb{R}^S \,:\, \sum_{x \in S} \mu(x) = 1,\ \mu(x) \geq 0 \,\forall\, x \right\}$$

der Wahrscheinlichkeitsmaße auf S.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{WV}(S)$ konvex und H strikt konkav ist.

b) Sei $U : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf S. Zeigen Sie, dass die *Boltzmann-Verteilung*

$$\mu_\beta(x) \;=\; Z_\beta^{-1}\, e^{\beta U(x)} \quad (x \in S) \qquad \text{mit} \qquad Z_\beta \;=\; \sum\nolimits_{x \in S} e^{\beta U(x)}$$

für $\beta \in \mathbb{R}$ die Entropie unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ν auf S mit festem Erwartungswert $E_\nu[U] = E_{\mu_\beta}[U] =: m_\beta$ maximiert.

Aufgabe 4 (Zentraler Grenzwertsatz; alte Klausuraufgabe).

a) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz für Summen von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert m und Varianz σ^2 (ohne Beweis).

b) Folgern Sie für $x \geq 0$:

$$\sum\nolimits_{k:|k-n/2| \leq \frac{1}{2} x \sqrt{n}} \binom{n}{k} \;\sim\; 2^n \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2}\, du \qquad \text{für } n \to \infty.$$

c) Seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige, auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $X_1 := -\log U_1$ (mit Beweis) ? Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1.

d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit

$$P\left[(U_1 \cdot U_2 \cdot \cdots \cdot U_n)^{n^{-1/2}}\, e^{n^{1/2}} \in [a,b] \right]$$

für $n \to \infty$ konvergiert, und geben Sie einen Ausdruck für den Grenzwert an.

Aufgabe 5 (Gesetz der großen Zahlen; alte Klausuraufgabe).

a) Was versteht man unter *P-stochastischer* und *P-fast-sicherer* Konvergenz einer Folge (Y_n) von reellwertigen Zufallsvariablen (Definition) ? Geben Sie ein Beipiel einer Folge, die stochastisch, aber nicht fast sicher konvergiert.

b) Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1 - p$, $p \in [0,1]$. Zeigen Sie: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow p$ P-fast sicher. Geben Sie alle im Beweis verwendeten Aussagen vollständig inklusive aller Voraussetzungen an.

c) Bei einem Roulettespiel gewinnt ein Spieler in jeder Runde mit Wahrscheinlichkeit $18/37$ einen Euro, und verliert mit Wahrscheinlichkeit $19/37$ einen Euro. Sei Z_n das Kapital des Spielers nach n Runden bei Anfangskapital a. Interpretieren Sie das Ereignis

$$A \;=\; \bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} \bigcap\nolimits_{k=n}^{\infty} \{Z_k \leq 0\}$$

anschaulich, und zeigen Sie $P[A] = 1$.