Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

12. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Dienstag 16.1., 15 Uhr

Aufgabe 1 (Konvergenz von Dirac-Maßen).
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^d$. Wann genau konvergiert die Folge $\mu_n = \delta_{x_n}$

a) schwach ?

b) vage ?

c) in der Variationsdistanz ?

d) in der Kantorovich-Distanz ?

Aufgabe 2 (Charakteristische Funktionen II).
Zeigen sie mithilfe von charakteristischen Funktionen:

a) Sind X und Y unabhängige $\mathrm{Bin}(m, p)$ bzw. $\mathrm{Bin}(n, p)$-verteilte Zufallsvariablen, dann ist $X + Y$ $\mathrm{Bin}(m + n, p)$-verteilt.

b) Sind X und Y unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1, und stimmt die Verteilung der Zufallsvariablen $(X + Y)/\sqrt{2}$ mit der von X und Y überein, dann sind X und Y normal verteilt.
Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass aus den Voraussetzungen eine Gleichung der Form $\varphi(t) = [\varphi(?)]^2$ *für die charakteristische Funktion folgt. Iterieren Sie die Gleichung, und verwenden Sie die Taylorentwicklung* $\varphi(t) = 1 - t^2/2 + o(t^2)$.

Aufgabe 3 (Konvergenz in Verteilung). Seien X_n, Y_n, X und Y Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X_n \to X$ und $Y_n \to Y$ in Verteilung.

a) Demonstrieren Sie anhand eines Beispiels, daß $X_n + Y_n$ nicht notwendig in Verteilung gegen $X + Y$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß diese Konvergenz gilt, wenn Y konstant ist.