Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

11. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Dienstag 9.1., 15 Uhr

Wir wünschen Ihnen fröhliche Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2018!

Aufgabe 1 (Starkes vs. schwaches Gesetz der großen Zahlen).
Es sei $S_n = \sum_{i=2}^n X_i$, wobei $(X_i)_{i\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_i = i] = \frac{1}{i\log i} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - \frac{1}{i\log i}$$

ist. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{E}[S_n/n] \to 0$ für $n \to \infty$.

b) Es gilt ein schwaches der großen Zahlen, d.h. $S_n/n \to 0$ $\mathbb{P}$-stochastisch.

c) Ein starkes Gesetz der großen Zahlen gilt nicht.

Aufgabe 2 (Ratenfunktion für große Abweichungen). Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit den unten angegebenen Verteilungen. Berechnen Sie jeweils die momentenerzeugenden Funktionen $M(t)$ der X_i, und skizzieren Sie die Graphen von $\Lambda(t) = \log M(t)$ und von der Ratenfunktion I im Satz von Chernoff. Zeigen Sie, daß I die angegebene Form hat, und erklären Sie den Verlauf von I anschaulich.

a) *Bernoulli-Verteilung mit Parameter* $p \in (0,1)$*:*

$$I(a) \;=\; a\log\frac{a}{p} + (1-a)\log\frac{1-a}{1-p} \quad \text{für } a \in [0,1], \qquad I(a) = \infty \quad \text{für } a \notin [0,1].$$

b) *Exponentialverteilung mit Parameter* $\lambda > 0$*:*

$$I(a) \;=\; \lambda a - 1 - \log(\lambda a) \quad \text{für } a > 0, \qquad I(a) = \infty \quad \text{für } a \leq 0.$$

Aufgabe 3 (Charakteristische Funktionen).

a) Die *beidseitige Exponentialverteilung* ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\mathbb{R}$ mit Dichte $f(x) = e^{-|x|}/2$. Zeigen Sie: Die charakteristische Funktion von μ ist

$$\varphi(t) \;=\; \frac{1}{1+t^2}.$$

(Hinweis: Sie können z.B. mit partieller Integration $\varphi(t) = 1 - t^2\varphi(t)$ *zeigen.)*

b) Folgern Sie, dass $\varphi(t) = e^{-|t|}$ die charakteristische Funktion der *Cauchy-Verteilung* mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ist.

c) Zeigen Sie: Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Cauchy-verteilte Zufallsvariablen, dann sind die empirischen Mittelwerte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$, auch Cauchy-verteilt. Warum ist dies kein Widerspruch zum Gesetz der großen Zahlen ?

Aufgabe 4 (Normale Zahlen). Eine Zahl $u \in [0,1)$ heißt *normal*, falls Folgendes gilt: Für alle $q \geq 2$ und $k \geq 1$ kommt in der q-adischen Dastellung

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} u_i q^{-i}$$

jede Ziffernfolge $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \{0, \ldots, q-1\}^k$ mit relativer Häufigkeit q^{-k} vor, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{1 \leq i \leq n \;:\; (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+k-1}) = a\right\}\right| \;=\; q^{-k}\;.$$

Zeigen Sie, dass bezüglich der Gleichverteilung auf $[0,1)$ fast jede Zahl normal ist.