Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

10. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Dienstag 19.12., 15 Uhr

Aufgabe 1 (Gesetz der großen Zahlen für korrelierte Zufallsvariablen).
Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) quadratintegrierbare Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit festem Erwartungswert $E[X_n] = m \ \forall n \in \mathbb{N}$. Es gelte

$$|\mathrm{Cov}\,[X_i, X_j]| \;\leq\; c_{|i-j|} \qquad \forall\, i, j \in \mathbb{N}$$

mit endlichen Konstanten $c_n \in (0, \infty)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Beweisen Sie die folgenden Erweiterungen der L^2-Versionen des schwachen und starken Gesetzes der großen Zahlen :

a) Konvergiert $c_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to m \qquad \text{in } L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \text{ und } \mathbb{P}\text{-stochastisch.}$$

b) Gilt sogar $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, dann ist $\mathrm{Var}[S_n/n]$ von der Ordnung $O(1/n)$, und es folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to m \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

c) Folgern Sie, dass ein starkes Gesetz der großen Zahlen gilt, wenn die Inkremente X_i durch einen stationären AR(1)-Prozeß (siehe Aufgabe 9.1) mit $\alpha \in (-1, 1)$ und $X_0 \sim N(0, \frac{\varepsilon^2}{1-\alpha^2})$ gegeben sind.

Aufgabe 2 (Hölder-Ungleichung). Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, und $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Leiten Sie die Hölder-Ungleichung

$$E[|X \cdot Y|] \;\leq\; \|X\|_{L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})} \cdot \|Y\|_{L^q(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})}$$

aus der Jensenschen Ungleichung her.
(Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass o.B.d.A. $X, Y \geq 0$ und $E[|Y|^q] = 1$ vorausgesetzt werden kann. Stellen Sie dann $E[XY]$ als Erwartungswert bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$ mit Dichte $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = Y^q$ dar.)

Aufgabe 3 (Bernsteinpolynome). Für eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist das zugehörige *Bernstein-Polynom* n-ten Grades definiert durch

$$f_n(p) \;=\; \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{für } p \in [0,1].$$

a) Stellen Sie die Bernstein-Polynome in der Form

$$f_n(p) \;=\; E\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]$$

mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ dar.

b) Folgern Sie, daß die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert.