15. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Musterlösungen werden ab 10.2. auf der Vorlesungshomepage bereitgestellt

---

1. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y habe die Dichte

$$f(x,y) \;=\; cx(y-x)e^{-y}\ , \quad 0 \le x \le y < \infty\ .$$

Bestimmen Sie c und zeigen Sie

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= 6x(y-x)y^{-3}\ , \quad 0 \le x \le y\ , \\ f_{Y|X}(y|x) &= (y-x)e^{x-y}\ , \quad 0 \le x \le y < \infty\ . \end{aligned}$$

2. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen.

a) Berechnen Sie die Dichtefunktionen von $X_1 + X_2$ und $X_1 + X_2 + X_3$.

b) Zeigen Sie, dass die Dichte von $\sum_{r=1}^{n} X_r$ auf $(0,n)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

3. Es seien X und Y unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $U := X + Y$ und $V := X - Y$ unkorrelliert, aber nicht notwendigerweise unabhängig sind. Zeigen Sie, dass U und V unabhängig sind, falls X und Y $N(0,1)$-verteilt sind.

4. Sei X eine Cauchyverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass auch $1/X$ die Cauchyverteilung besitzt. Finden sie eine andere, nichttriviale Verteilung mit dieser Invarianzeigenschaft.

5. Es sei $X = (X_1, \ldots X_n)$ ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor. Zeigen Sie, dass $Y := \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ die $N(m, \sigma^2)$-Verteilung besitzt, wobei

$$m := \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}[X_i], \qquad \sigma^2 := \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}[X_i] + 2 \sum_{i<j} a_i a_j \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

6. Seien X und Y unabhängige, $\Gamma(\lambda, \alpha)$ bzw. $\Gamma(\lambda, \beta)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $W := X + Y$ und $Z := X/(X+Y)$ unabhängig sind, und dass Z Beta-verteilt ist mit Parametern α und β. Dabei ist die *Beta-Verteilung* gegeben durch die Verteilungsdichte

$$f(x) \;:=\; \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in [0,1]\ .$$

7. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y sei eine bivariate Normalverteilung mit der Dichte

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right) \;.$$

Sei $Z = \min\{X, Y\}$. Zeigen Sie : $\mathbb{E}[Z] = \sqrt{(1-\rho)/\pi}$, $\quad \mathbb{E}[Z^2] = 1$.

8. Sei X eine nichtnegative Zufallsvariable. Zeigen Sie :

$$\mathbb{E}[X^r] \;=\; \int_0^\infty r x^{r-1}\, \mathbb{P}[X > x] dx \;,$$

für jedes $r \geq 1$.

9. Sei X eine integrierbare Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie :

$$\int_{-\infty}^{a} F(x) dx \;=\; \int_a^\infty (1 - F(x))\, dx \qquad \text{genau dann, wenn } \; a = \mathbb{E}[X].$$

10. Sei X gleichverteilt auf $(0,1)$. Finden Sie eine Funktion $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, sodass $Y = g(X)$ exponentialverteilt ist zum Parameter λ.

11. Seien X, Y, Z unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ, μ, ν. Berechnen Sie $\mathbb{P}[X < Y < Z]$.

12. Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilten Zufallsvariable.