Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

14. Blatt „Einführung in die W'theorie"

1. (Reelle Zufallsvariablen)

a) Wie ist die Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\mathbb{R}$ definiert ? [*1 Pkt*]

b) Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen zu den folgenden Verteilungen: [*5 Pkt*]

$$\text{(i) Exp}(1) \qquad \text{(ii) } \tfrac{1}{3}\,\delta_0 + \tfrac{2}{3}\,\delta_1 \qquad \text{(iii) } \mathcal{U}_{(1,4)}$$

c) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F stets monoton wachsend und rechtsstetig ist mit $\lim_{c\to-\infty} F(c) = 0$ und $\lim_{c\to\infty} F(c) = 1$. [*6 Pkt*]

d) Wann heisst eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$ *absolutstetig* ? Geben Sie ein Beispiel einer Verteilung, die weder diskret noch absolutstetig ist (ohne Beweis). [*2 Pkt*]

e) Sei $\alpha \geq 1$, und sei X eine nicht-negative absolutstetige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Dichte $f_X(t) \;=\; c\cdot t^{\alpha-1}\exp(-t^{\alpha})\,, \qquad t \geq 0$, wobei c eine Konstante ist.

(i) Bestimmen Sie den Wert von c. [*2 Pkt.*]

(ii) Zeigen Sie: $P\,[X \geq s+t \,|\, X \geq t] \;\leq\; P\,[X \geq s]$ für alle $s, t \geq 0$. [*4 Pkt.*]
Welche stärkere Aussage gilt im Fall $\alpha = 1$?

2. (Zentraler Grenzwertsatz)

a) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz für Summen von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert m und Varianz σ^2 (ohne Beweis). [*3 Pkt*]

b) Folgern Sie für $x \geq 0$: [*8 Pkt*]

$$\sum_{k:|k-n|\leq\frac{1}{2}x\sqrt{n}} \binom{n}{k} \;\sim\; 2^n \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2}\, du \qquad \text{für } n \to \infty.$$

c) Seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige, auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $X_1 := -\log U_1$ (mit Beweis) ? Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1. [*4 Pkt*]

d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit [*5 Pkt*]

$$P\left[(U_1 \cdot U_2 \cdot \cdots \cdot U_n)^{n^{-1/2}}\, e^{n^{1/2}} \in [a,b]\right]$$

für $n \to \infty$ konvergiert, und geben Sie einen Ausdruck für den Grenzwert an.

3. (Gesetz der großen Zahlen)

a) Was versteht man unter *P-stochastischer* und *P-fast-sicherer* Konvergenz einer Folge (Y_n) von reellwertigen Zufallsvariablen (Definition) ? Geben Sie ein Beipiel einer Folge, die stochastisch, aber nicht fast sicher konvergiert. [*4 Pkt*]

b) Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1-p$, $p \in [0,1]$. Zeigen Sie: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \;\longrightarrow p \quad P$-fast sicher. Geben Sie alle im Beweis verwendeten Aussagen vollständig inklusive aller Voraussetzungen an. [*9 Pkt*]

c) Bei einem Roulettespiel gewinnt ein Spieler in jeder Runde mit Wahrscheinlichkeit $18/37$ einen Euro, und verliert mit Wahrscheinlichkeit $19/37$ einen Euro. Sei Z_n das Kapital des Spielers nach n Runden bei Anfangskapital a. Interpretieren Sie das Ereignis [*7 Pkt*]

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{Z_k \leq 0\}$$

anschaulich, und zeigen Sie $P[A] = 1$.

4. (Charakteristische Funktionen)

a) Definieren Sie die charakteristische Funktion einer reellwertigen Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Warum existiert der Erwartungswert, der in der Definition auftritt ? [*2 Pkt*]

b) Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen von Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen: [*6 Pkt*]

(i) Exp(1) (ii) Bernoulli(1/2) (iii) Bin(n,1/2).

c) Zeigen Sie, dass für die charakteristische Funktion einer Linearkombination $aX + bY$ $(a, b \in \mathbb{R})$ von unabhängigen Zufallsvariablen X und Y gilt: $\phi_{aX+bY}(t) = \phi_X(at) \cdot \phi_Y(bt)$. [*5 Pkt*]
Folgern Sie: Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig und standardnormalverteilt, dann ist auch die Zufallsvariable $\tilde{S}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ standardnormalverteilt. Nennen Sie alle Aussagen und Voraussetzungen, die Sie zum Beweis verwenden.

d) Sei nun (X_n) eine Folge von beliebigen unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ und $\mathrm{Var}[X_n] = 1$. Beweisen Sie, dass $(\tilde{S}_n)$ in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable konvergiert. Geben Sie wieder alle Aussagen, die Sie verwenden, vollständig an. [*5 Pkt*]

e) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Verteilungen von $\tilde{S}_n$ im Allgemeinen nicht in Variationsdistanz konvergieren. [*2 Pkt*]

5. (Relative Entropie und große Abweichungen) Sei $(S, \mathcal{S})$ ein meßbarer Raum.

a) Definieren Sie die relative Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf S bzgl. einer weiteren Wahrscheinlichkeitsverteilung ν. Berechnen Sie die relative Entropie in den folgenden Fällen:

(i) μ und ν sind Bernoulli-Verteilungen.
(ii) μ und ν sind eindimensionale Normalverteilungen.
(iii) μ ist eine Verteilung aus der exponentiellen Familie zu ν und einer beschränkten meßbaren Funktion $U : S \to \mathbb{R}$.

b) Seien $A_n \subseteq S^n$ $(n \in \mathbb{N})$ meßbare Mengen mit $\liminf \mu^n[A_n] > 0$. Formulieren und beweisen Sie eine asymptotische untere Schranke für die Wahrscheinlichkeiten $\nu^n[A_n]$ auf der exponentiellen Skala.

c) Sei $U : S \to \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar, und $m = \int U \, d\nu$ der Erwartungswert bzgl. ν. Zeigen Sie für $a > m$:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu^n \left[\sum_{i=1}^n U(x_i) \geq na\right] \geq \inf_{t\in\mathbb{R}}(at - \log \int e^{tU} d\nu).$$

Ist die Abschätzung scharf ?