Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

13. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 28.1., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

---

1. (Schätzen von Kenngrößen einer unbekannten Verteilung) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger Stichproben von einer unbekannten Verteilung μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\int x^2 \,\mu(dx) < \infty$. Zeigen Sie:

a) Die *Stichprobenmittel* $\bar{X}_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$, sind *erwartungstreue* Schätzer des Mittelwerts $m = \int x \,\mu(dx)$ der Verteilung, d.h.,

$$E\left[\bar{X}_n\right] \;=\; m \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Schätzfolge ist *konsistent*, d.h. $\bar{X}_n \to m \quad \mathbb{P}$-fast sicher.

b) Die *renormierten Stichprobenvarianzen* $\tilde{V}_n(\omega) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i(\omega) - \bar{X}_n(\omega)\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, bilden eine konsistente Folge von erwartungstreuen Schätzern für die Varianz der Verteilung μ.

c) Um auf Normalverteilung zu testen, trägt man in einem *Normal-QQ-Plot* die Quantile der empirischen Verteilung gegen die entsprechenden Quantile der Standardnormalverteilung auf, d.h. man plottet die Punkte

$$\left(\Phi^{-1}\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right), X_{(k)}(\omega)\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, und $X_{(k)}(\omega)$ die k-te Ordnungsstatistik der Werte $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ ist. Motivieren Sie das Verfahren, indem Sie zeigen, dass die Punkte auf einer Geraden liegen, wenn man die empirischen Quantile durch die theoretischen Quantile einer Normalverteilung $N(m, \sigma^2)$ ersetzt. Wie kann man m und σ aus der Geraden ablesen ?

2. (Entropiemaximierung unter Nebenbedingungen) Sei S ein endlicher Zustandsraum, und $H(\mu) = -\sum_{\mu(x)>0} \mu(x) \log \mu(x)$ das Entropiefunktional auf dem Raum

$$\mathcal{M}_1(S) \;=\; \left\{\mu \in \mathbb{R}^S \;:\; \sum_{x \in S} \mu(x) = 1,\; \mu(x) \geq 0 \,\forall\, x\right\}$$

der Wahrscheinlichkeitsmaße auf S.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_1(S)$ konvex und H strikt konkav ist.

b) Sei $U : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf S. Zeigen Sie, dass die *Boltzmann-Verteilung*

$$\mu_\beta(x) \;=\; Z_\beta^{-1}\, e^{\beta U(x)} \quad (x \in S) \qquad \text{mit} \qquad Z_\beta \;=\; \sum\nolimits_{x\in S} e^{\beta U(x)}$$

für $\beta \in \mathbb{R}$ die Entropie unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ν auf S mit festem Erwartungswert $E_\nu[U] = E_{\mu_\beta}[U] =: m_\beta$ maximiert.

3. (Hoeffding-Ungleichung)
Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X_i] = m$. Es gelte

$$A \;\le\; X_i \;\le B \qquad \forall\, \omega \in \Omega,\; 1 \le i \le n\,.$$

mit endlichen Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Für $t \in \mathbb{R}$ sei P_t die bzgl. P absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Dichte

$$\rho_t(\omega) \;=\; e^{tX_1}(\omega) \,/ E[e^{tX_1}]\;. \qquad\qquad \text{Zeige:}$$

a) Die logarithmische momentenerzeugende Funktion $\Lambda(t)$ der X_i ist zweimal differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \Lambda'(t) &= E_{P_t}[X_1] && (\text{ Erwartungswert von } X_1 \text{ bzgl. } P_t\text{), und} \\ \Lambda''(t) &= \mathrm{var}_{P_t}[X_1] && (\text{ Varianz von } X_1 \text{ bzgl. } P_t\text{).} \end{aligned}$$

b) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Lambda''(t) \;\le\; \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \Lambda(t) \;\le\; mt + \frac{(B-A)^2}{8}\,t^2\,.$$

c) Für die großen Abweichungen vom Gesetz der großen Zahlen ergibt sich folgende obere Schranke (*Hoeffding 1963*):

$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ge m + \varepsilon\right] \;\le\; e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(B-A)^2}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \varepsilon > 0.$$

4. (Brownsche Molekularbewegung) Ein schweres Teilchen erfahre durch zufällige Stöße von leichten Teilchen pro Zeiteinheit eine zufällige Geschwindigkeitsumkehr, d.h. für seine Ortskoordinate (in einer vorgegebenen Richtung) zur Zeit t gelte $X_t \;=\; \sum_{i=1}^{\lfloor t\rfloor} V_i$ mit unabhängigen Geschwindigkeiten V_i, wobei $\mathbb{P}[V_i = \pm v] = \frac{1}{2}$ für ein $v > 0$. Geht man zu makroskopischen Skalen über, so wird das Teilchen zur Zeit t beschrieben durch die Zufallsvariable

$$B_t^{(\varepsilon)} \;=\; \sqrt{\varepsilon} X_{\frac{t}{\varepsilon}}\;,$$

wobei $\varepsilon > 0$. Bestimme den Verteilungslimes B_t von $B_t^{(\varepsilon)}$ für $\varepsilon \searrow 0$ sowie dessen Dichte ρ_t. Zeige, dass diese Dichten die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \rho_t(x)}{\partial t} \;=\; \frac{D}{2}\frac{\partial^2 \rho_t(x)}{\partial x^2}$$

mit einer geeigneten Diffusionskonstanten $D > 0$ erfüllen.