Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

12. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 21.1., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

---

1. (Gesetz der großen Zahlen via charakteristische Funktionen)

a) Beweise *mithilfe von charakteristischen Funktionen* die folgende Version des schwachen Gesetzes der großen Zahlen :

Sind $X_1, X_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ i.i.d. Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $E[X_i] = m$, dann konvergiert die Verteilung von $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ schwach gegen das Diracmaß δ_m.

b) Folgere hieraus, daß $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ auch stochastisch gegen m konvergiert.

2. (Grenzwertsatz für Poisson-Verteilungen)

a) Bestimme (z.B. mithilfe von charakteristischen Funktionen) die Verteilung der Summe von n unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$.

b) Zeige mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes:

$$e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdot + \frac{n^n}{n!}\right) \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

3. (Fehlerfortpflanzung bei transformierten Beobachtungen)

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten reellwertigen Zufallsvariablen mit endlicher Varianz $v > 0$ und Erwartungswert m. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(m) \neq 0$ und beschränktem f''. Zeige: Für $n \to \infty$ gilt

$$\frac{\sqrt{n/v}}{f'(m)}\left(f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) - f(m)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

(Hinweis: Verwende die Taylor-Entwicklung von f im Punkt m und schätze das Restglied mit der Tschebyscheff-Ungleichung ab.)

4. (Charakteristische Funktionen III) Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist die charakteristische Funktion ϕ einer Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertig, so haben X und $-X$ dieselbe Verteilung.

b) Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z gilt

$$\mathbb{E}\left[Z^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

c) Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit charakteristischer Funktion $\exp(-|t^\alpha|)$, so besitzt $n^{-1/\alpha} \sum_{i=1}^n X_i$ dieselbe Verteilung wie X_1.