Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

11. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 14.1., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

---

1. (Konvergenz von Dirac-Maßen)
Sei x_n $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge im $\mathbb{R}^d$. Wann genau konvergiert die Folge $\mu_n = \delta_{x_n}$

a) schwach ?

b) vage ?

c) in Variationsnorm ?

d) in der Kantorovich-Distanz ?

2. (Charakteristische Funktionen I)

a) Die *beidseitige Exponentialverteilung* ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\mathbb{R}$ mit Dichte $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Zeigen Sie: Die charakteristische Funktion von μ ist $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

b) Folgern Sie, daß $\varphi(t) = e^{-|t|}$ die charakteristische Funktion der Cauchy-Verteilung ist (Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$).

c) Zeigen Sie: Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Cauchy-verteilte Zufallsvariablen, dann sind die empirischen Mittelwerte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$, auch Cauchy-verteilt. Warum ist dies kein Widerspruch zum Gesetz der großen Zahlen ?

3. (Charakteristische Funktionen II)
Zeigen sie mithilfe von charakteristischen Funktionen:

a) Sind X und Y unabhängige $\mathrm{Bin}(m, p)$ bzw. $\mathrm{Bin}(n, p)$-verteilte Zufallsvariablen, dann ist $X + Y$ $\mathrm{Bin}(m + n, p)$-verteilt.

b) Sind X und Y unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1, und stimmt die Verteilung der Zufallsvariablen $(X + Y)/\sqrt{2}$ mit der von X und Y überein, dann sind X und Y normal verteilt.
Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass aus den Voraussetzungen eine Gleichung der Form $\varphi(t) = [\varphi(?)]^2$ *für die charakteristische Funktion folgt. Iterieren Sie die Gleichung, und verwenden Sie die Taylorentwicklung* $\varphi(t) = 1 - t^2/2 + o(t^2)$.

4. (Konvergenz in Verteilung) Seien X_n, Y_n, X und Y Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X_n \to X$ und $Y_n \to Y$ in Verteilung.

a) Demonstrieren Sie anhand eines Beispiels, daß $X_n + Y_n$ nicht notwendig in Verteilung gegen $X + Y$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß diese Konvergenz gilt, wenn Y konstant ist.