Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

10. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis (!!!!) Mi 8.1., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

---

1. (Autoregressiver Prozeß) Seien $\varepsilon, \alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den durch

$$X_n \;:=\; \alpha X_{n-1} + \varepsilon Z_n\;, \qquad n \in \mathbb{N},$$

definierten AR(1)-Prozess, wobei X_0 und Z_n ($n \in \mathbb{N}$) unabhängige reelle Zufallsvariablen mit $Z_n \sim N(0,1)$ sind. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls $X_{n-1} \sim N(m, \sigma^2)$, so gilt $X_n \sim N(\alpha m, \alpha^2\sigma^2 + \varepsilon^2)$.

b) *Stationäre Verteilung:* Für $|\alpha| < 1$ ist $\mu := N(0, \frac{\varepsilon^2}{1-\alpha^2})$ ein *Gleichgewicht*, d.h.

$$X_0 \sim \mu \quad \Longrightarrow \quad X_n \sim \mu \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

c) *Abfall der Korrelationen:* Falls $X_0 \sim \mu$, so gilt

$$\mathrm{Cov}[X_n, X_{n-k}] \;=\; \alpha^k \frac{\varepsilon^2}{1-\alpha^2} \qquad \text{für alle } 0 \le k \le n.$$

2. (Gesetz der großen Zahlen für korrelierte Zufallsvariablen)
Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) quadratintegrierbare Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit festem Erwartungswert $E[X_n] = m \;\forall\, n \in \mathbb{N}$. Es gelte

$$|\mathrm{Cov}\,[X_i, X_j]| \;\le\; \varepsilon_{|i-j|} \qquad \forall\, i,j \in \mathbb{N}$$

mit endlichen Konstanten $\varepsilon_n \in (0,\infty)$, $n = 0,1,2,\ldots$. Beweisen Sie die folgenden Erweiterungen der L^2-Versionen des schwachen und starken Gesetzes der großen Zahlen :

a) Konvergiert $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to m \qquad \text{in } L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \text{ und } \mathbb{P}\text{-stochastisch.}$$

b) Gilt sogar $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n < \infty$, dann ist $\mathrm{Var}[S_n/n]$ von der Ordnung $O(1/n)$, und es folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to m \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

c) Folgern Sie, dass ein starkes Gesetz der großen Zahlen gilt, wenn die Inkremente X_i durch einen stationären AR(1)-Prozeß (siehe Aufgabe 1) mit $\alpha \in (-1,1)$ und $X_0 \sim N(0, \frac{\varepsilon^2}{1-\alpha^2})$ gegeben sind.

3. (Ratenfunktion für große Abweichungen) Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit den unten angegebenen Verteilungen. Berechnen Sie jeweils die momentenerzeugenden Funktionen $M(t)$, und skizzieren Sie die Graphen von $\Lambda(t) = \log M(t)$ und von der Ratenfunktion I im Satz von Chernoff. Zeigen Sie, daß I die angegebene Form hat. Erklären Sie den Verlauf von I anschaulich.

a) *Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p \in (0,1)$:*

$$I(a) \;=\; a \log \frac{a}{p} + (1-a) \log \frac{1-a}{1-p} \quad \text{für } a \in [0,1], \qquad I(a) = \infty \quad \text{für } a \notin [0,1].$$

b) *Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$:*

$$I(a) \;=\; \lambda a - 1 - \log(\lambda a) \quad \text{für } a > 0, \qquad I(a) = \infty \quad \text{für } a \leq 0.$$

4. (Normale Zahlen) Eine Zahl $u \in [0,1)$ heißt *normal*, falls Folgendes gilt: Für alle $q \geq 2$ und $k \geq 1$ kommt in der q-adischen Dastellung

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} u_i q^{-i}$$

jede Ziffernfolge $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \{0, \ldots, q-1\}^k$ mit relativer Häufigkeit q^{-k} vor, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{1 \leq i \leq n \;:\; (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+k-1}) = a\right\}\right| \;=\; q^{-k}\,.$$

Zeigen Sie, dass bezüglich der Gleichverteilung auf $[0,1)$ fast jede Zahl normal ist.

Wir wünschen Ihnen fröhliche Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2014 !