Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

9. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 17.12., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

---

1. (Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen - WICHTIG) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $p \in [1, \infty)$.

a) Zeige: Konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{P}$-stochastisch gegen 0, dann existiert eine Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die $\mathbb{P}$-fast sicher gegen 0 konvergiert.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass aus L^p-Konvergenz von X_n gegen 0 stochastische Konvergenz folgt. Zeige, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

c) Wir setzen nun zusätzlich voraus, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|^p$ integrierbar ist. Zeige, dass dann aus $\mathbb{P}$-fast sicherer bzw. $\mathbb{P}$-stochastischer Konvergenz von X_n gegen 0 auch L^p-Konvergenz folgt.

2. (Unabhängigkeit und Unkorreliertheit) Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ rellwertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   i) X und Y sind unabhängig.

   ii) $f(X)$ und $g(Y)$ sind unkorrelliert für alle messbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(X),\ g(Y) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

b) Sind X und Y gemeinsam normalverteilt, dann ist Unabhängigkeit von X und Y äquivalent zur Unkorreliertheit von X und Y.

c) Konstruiere normalverteilte Zufallsvariablen X und Y, die unkorrelliert, aber nicht unabhängig sind.

3. (Summen und Quotienten unabhängiger Zufallsvariablen) Seien X und Y unter P unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit absolutstetigen Verteilungen.

a) Berechne die Verteilung von $X + Y$, wenn X und Y auf $(0, 1)$ gleichverteilt sind.

b) Zeige: Gilt $X > 0$ P-fast sicher, dann ist die Verteilung von $Z = Y/X$ absolutstetig mit Dichte

$$f_{Y/X}(z) \ = \ \int_0^\infty f_X(x)\, f_Y(zx)\, x\, dx.$$

Berechne die Verteilung von Z, wenn X und Y auf $(0, 1)$ gleichverteilt sind.

4. (Bernsteinpolynome) Für eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist das zugehörige *Bernstein-Polynom* n-ten Grades definiert durch

$$f_n(p) \;=\; \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{für } p \in [0,1].$$

a) Stelle die Bernstein-Polynome in der Form

$$f_n(p) \;=\; E\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]$$

mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ dar.

b) Folgere, daß die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert.