Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

8. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 10.12., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

---

1. (Bedingte Dichten)

a) Patrick und Lisa treffen sich freitags nach der Wahrscheinlichkeitstheorievorlesung in der Cafeteria. Sie kommen dort unabhängig und gleichverteilt zwischen 12 und 13 Uhr an. Jeder ist bereit s Minuten zu warten, bevor er wieder geht. Finde ein minimales s, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden treffen, mindestens 50 % beträgt.

b) Ein Stock wird an einer zufällig gewählten Stelle in zwei Teile zerbrochen. Der längere Teil wird wieder zufällig in zwei Teile geteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich aus den drei Teilen ein Dreieck bilden lässt?

2. (Dichtetransformation) Seien X_1 und X_2 unabhängige, zum Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Zeige, dass die Variablen $Y_1 = X_1 + X_2$ und $Y_2 = X_1/(X_1+X_2)$ ebenfalls unabhängig sind. Bestimme zudem die Verteilungen von Y_1 und Y_2.

3. (Absolutstetigkeit in Produktmodellen)

a) Seien $\mu_1, \ldots, \mu_n$ und $\nu_1, \ldots, \nu_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf den meßbaren Räumen $(S_1, \mathcal{S}_1)$, ... ,$(S_n, \mathcal{S}_n)$ mit $\mu_i \ll \nu_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Zeige, dass dann $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ ebenfalls absolutstetig bzgl. $\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n$ ist, und gebe die relative Dichte an.

b) Seien μ und ν zwei unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem meßbaren Raum $(S, \mathcal{S})$. Zeige, dass das unendliche Produkt $\mu^\infty = \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mu$ nicht absolutstetig bzgl. des unendlichen Produkts $\nu^\infty = \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \nu$ ist.

4. (Zufällige Bewegungen)

a) Ein Tierchen bewegt sich wie folgt zufällig in einer Ebene: Es läuft eine Streckeneinheit weit in eine zufällige Richtung Ψ_1, sucht sich dann eine neue zufällige Richtung Ψ_2 aus und läuft wieder eine Streckeneinheit weit, usw. Hierbei seien die Winkel Ψ_i unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 2\pi)$. Es sei D_n der Abstand vom Startpunkt zur Position nach dem n-ten Schritt. Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}[D_n^2]$.

b) Im Ursprung der Ebene befinden sich zur Zeit $t = 0$ genau 30 Tierchen, die sich wie in a) unabhängig voneinander bewegen. Die Tierchen benötigen für jeden Schritt eine Zeiteinheit. Bestimme zu jedem $n \geq 1$ ein möglichst kleines $r_n > 0$ mit der Eigenschaft: Mit Wahrscheinlichkeit $\geq 0,9$ befinden sich zur Zeit $t = n$ mehr als 15 Tierchen in einem Kreis mit Radius r_n um den Ursprung.

Hinweis: Bestimme zunächst ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft: Sind $Z_1, \ldots, Z_{30}$ unabhängig und Bernoulli-verteilt zum Parameter $p \geq 0,5 + \delta$, so ist

$$\mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^{30} Z_i > 15\Big] \;\geq\; 0,9 \quad .$$