Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

7. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 03.12., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

---

1. (Berechnung von Erwartungswerten)

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ in den folgenden Fällen:

a.1) X ist gleichverteilt auf $[0, 1]$.

a.2) Die Verteilung von X ist absolutstetig mit Dichte $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

a.3) $X = e^Y$ für eine $N(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable Y.

b) Die *momentenerzeugende Funktion* einer reellen Zufallsvariable X ist definiert durch

$$M(t) \quad = \quad \mathbb{E}[\exp(tX)] \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die momentenerzeugende Funktion in den folgenden Fällen:

b.1) X ist binomialverteilt zu den Parametern (n, p),

b.2) X ist exponentialverteilt zum Parameter λ,

b.2) X ist $N(m, \sigma^2)$ verteilt.

Wie kann man die Momente $\mathbb{E}[X^n]$ berechnen, wenn man die Funktion $M(t)$ kennt?

2. (Bivariate Normalverteilung) Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0$ und $\rho \in (-1, 1)$.

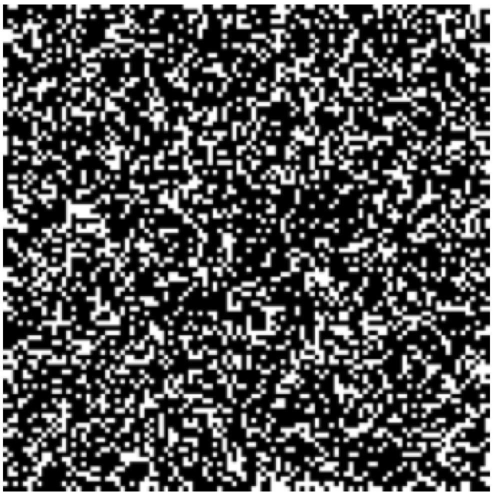
a) Zeigen Sie, dass

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}Q(x)\right) \qquad \text{mit}$$

$$Q(x) \quad = \quad \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\frac{x_2-m_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ im $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte, die Varianzen, und die Kovarianz $\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])]$ von Zufallsvariablen X_1, X_2 mit gemeinsamer Vert. μ.



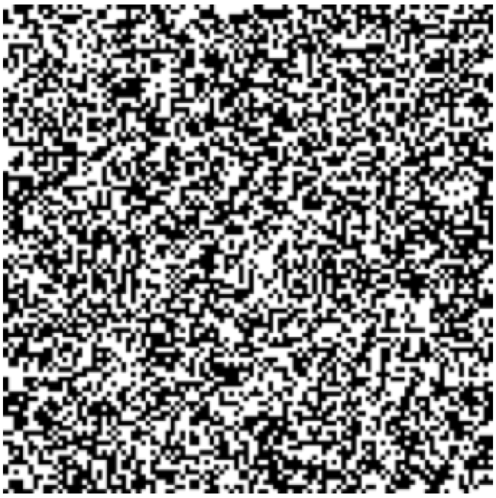


Abbildung 1: Perkolation in Dimension $d = 2$ mit $p = 0.7$ und $p = 0.5$

3. (Acceptance-Rejection-Sampling) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien μ und ν Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einem meßbaren Raum $(S, \mathcal{S})$. Das Maß μ sei absolutstetig bzgl. ν mit beschränkter relativer Dichte

$$\rho(x) \;=\; d\mu/d\nu\,(x) \;\leq\; C, \qquad C \in [1, \infty).$$

a) Sei $X : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable mit Verteilung ν und $U : \Omega \to (0,1)$ eine hiervon unabhängige, auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mu[B] \;=\; \mathbb{P}\left[X \in B \,\middle|\, U \leq \frac{\rho(X)}{C} \right] \qquad \forall\; B \in \mathcal{S},$$

d.h. μ ist die bedingte Verteilung von X gegeben $U \leq \rho(X)/C$.

b) Seien nun $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to S$ und $U_1, U_2, \ldots : \Omega \to (0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung ν bzw. $\mathcal{U}_{(0,1)}$. Zeigen Sie: Dann ist

$$T \;:=\; \min \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, U_n \leq \frac{\rho(X_n)}{C} \right\}$$

$\mathbb{P}$-f.s. endlich, und die (für $\mathbb{P}$-f.a. ω eindeutig definierte) Zufallsvariable

$$Y(\omega) \;:=\; X_{T(\omega)}(\omega)$$

hat Verteilung μ.

4. (Perkolation) Sei $p \in [0,1]$. Wir betrachten unabhängige Zufallsvariablen X_i, $i \in \mathbb{Z}^d$, mit $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$ und $\mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - p$. Der Gitterpunkt $i \in \mathbb{Z}^d$ heißt *durchlässig*, falls $X_i = 1$ gilt. Sei A das Ereignis, daß eine unendliche Zusammenhangskomponente aus durchlässigen Gitterpunkten existiert. A_0 sei das Ereignis, daß der Nullpunkt in einer unendlichen Zusammenhangskomponente von durchlässigen Punkten enthalten ist. Zeige:

a) Im Fall $d = 1$, $p < 1$, gilt $\mathbb{P}[A] = 0$.

b) Für alle $d \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ gilt: $\qquad \mathbb{P}[A] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}[A_0] > 0.$