Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

6. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 26.11., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

---

1. (Asymptotische Ereignisse) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, nicht-negativen rellwertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Welche der folgenden Ereignisse sind asymptotische Ereignisse ?

$$\{X_n > 2n \text{ unendlich oft}\},\ \{\liminf X_n < 17\},\ \{\inf X_n > 5\},$$
$$\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < 1\},\ \{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\},\ \{\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\}.$$

b) Geben Sie Beispiele von Zufallsvariablen an, die bzgl. der asymptotischen σ-Algebra meßbar sind (mit Beweis).

2. (Ordnungsstatistiken) Seien $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Die Verteilung der X_i sei absolutstetig mit Dichte f. Zeigen Sie:

a) Die gemeinsame Verteilung der Ordnungsstatistiken $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ ist absolutstetig mit Dichte

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(y_1, \ldots, y_n) \quad = \quad n! \cdot I_{\{y_1 < y_2 < \ldots < y_n\}} f(y_1) \cdots f(y_n).$$

b) Die Verteilungen der einzelnen Ordnungsstatistiken sind absolutstetig mit Dichte

$$f_{X_{(k)}}(y) \quad = \quad \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(y)^{k-1} (1-F(y))^{n-k} f(y).$$

c) Sind die X_i gleichverteilt auf $(0,1)$, dann ist $X_{(k)}$ *Beta-verteilt mit Parametern* k *und* $n-k+1$, d.h.

$$f_{X_{(k)}}(y) \ = \ \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} y^{k-1} (1-y)^{n-k} I_{(0,1)}(y).$$

3. (Asymptotische Unabhängigkeit) Jeder von n Punkten werde mit Wahrscheinlichkeit λ/n grün, und mit Wahrscheinlichkeit μ/n rot gefärbt, unabhängig von den anderen Punkten. Sei G die Anzahl der grün gefärbten, und R die Anzahl der rot gefärbten Punkte. Zeige:

a) Die Zufallsvariable (G, R) hat eine Trinomial-Verteilung mit Parametern n, λ/n, μ/n und $1 - (\lambda + \mu)/n$, d.h. es gilt

$$P[G = g, R = r] \;=\; \frac{n!}{g!\,r!\,(n-g-r)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{g}\left(\frac{\mu}{n}\right)^{r}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{n}\right)^{n-g-r}.$$

Insbesondere sind G und R nicht unabhängig.

b) Im Grenzwert $n \to \infty$ sind G und R asymptotisch unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λ und μ, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} P[G = g, R = r] \;=\; \ldots \text{ (?) } \ldots$$

4. (Rekorde) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit *stetiger* Verteilungsfunktion.

a) Zeige, dass auch unter dieser Annahme gilt:

$$\mathbb{P}\,[X_n = X_m] \;=\; 0 \qquad \text{für } n \neq m.$$

b) Seien $E_1 := \Omega$ und für $n \geq 2$,

$$E_n \;:=\; \{X_n > X_m \;\forall\, m < n\} \;=\; \{\text{„ein Rekord wird zur Zeit } n \text{ erreicht"}\}\ .$$

Zeige, dass die Ereignisse $E_1, E_2, \ldots$ unabhängig sind mit $\mathbb{P}\,[E_n] = 1/n$.