Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

5. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 19.11., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

---

1. (Unabhängigkeit und Verteilungsfunktionen) Seien X und Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen. Wir definieren $U = \min(X,Y)$ und $V = \max(X,Y)$. Zeigen Sie:

a) Die Verteilungsfunktionen von U und V sind gegeben durch:

$$F_U(u) \;=\; 1 - \big(1 - F_X(u)\big)\big(1 - F_Y(u)\big), \quad F_V(v) \;=\; F_X(v)F_Y(v)\;.$$

b) Sind X und Y beide exponentialverteilt zum Parameter 1, so ist U exponentialverteilt zum Parameter 2. Welche Dichte hat die Verteilung von V in diesem Fall? Skizzieren Sie die Dichten und interpretieren Sie die Ergebnisse anschaulich.

2. (Produktdichten) Seien $X_1, \ldots, X_n$ reellwertige Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie: Sind $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}$ unabhängig mit absolutstetigen Verteilungen, dann ist auch die gemeinsame Verteilung absolutstetig mit Dichte

$$f_{X_1,\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\,.$$

b) Folgern Sie, dass in diesem Fall

$$\mathbb{P}\,[X_i = X_j] \;=\; 0 \quad \text{für } i \neq j$$

gilt. Ist diese Aussage auch wahr, wenn die Verteilungen nicht absolutstetig sind ?

c) Umgekehrt sei die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$ absolutstetig mit einer Dichte in Produktform:

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\,, \qquad g_i : \mathbb{R} \to [0, \infty) \text{ meßbar.}$$

Zeigen Sie: $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig, und die Verteilungen sind absolutstetig mit Dichten

$$f_{X_i} \;=\; g_i \Big/ \int_{\mathbb{R}} g_i\, dx\;, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

3. (Extrema von exponentialverteilten Zufallsvariablen) Seien $T_1, T_2, \ldots$ unabhängige, Exp(1)-verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Zeigen Sie

$$\mathbb{P}[T_n \geq \log n + c \log\log n \text{ unendlich oft}] \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } c > 1, \\ 1 & \text{falls } c \leq 1. \end{cases}$$

b) Folgern Sie, dass $\mathbb{P}$- fast sicher gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{T_n - \log n}{\log\log n} \;=\; 1.$$

4. (Deterministische Zufallsvariablen)

a) Zeigen Sie : Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann unabhängig von sich selbst, wenn eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\mathbb{P}\,[X = c] \;=\; 1\;.$$

b) Sei X ein fast sicherer Grenzwert einer beliebigen Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass X unabhängig von sich selbst, also fast sicher konstant ist.