

4. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe bis Di 12.11., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

1. (Konfidenzintervalle) Unter 100 Personen, die während eines Jahres den Führerschein erworben haben, verursachen 30 im Jahr darauf einen Schaden. Leiten Sie exakte und approximative Konfidenzintervalle zu den Konfidenzniveaus 80% und 90% für die Wahrscheinlichkeit p her, im Jahr nach Erwerb des Führerscheins einen Schaden zu verursachen.

2. (Normalapproximation der Poissonverteilung) Sei N eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poissonverteilte Zufallsvariable. Beweise mithilfe der Stirlingschen Formel:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P[a_\lambda \leq N \leq b_\lambda] = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \forall a < b$$

mit $a_\lambda := \lambda + a\sqrt{\lambda}$ und $b_\lambda := \lambda + b\sqrt{\lambda}$. Hierbei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

3. (Überbuchungen) Häufig ist die Zahl der zu einem Flug erscheinenden Passagiere geringer als die Zahl der Buchungen für diesen Flug. Die Fluggesellschaft praktiziert daher das sogenannte Überbuchen (d.h. sie verkauft mehr Tickets als Sitze vorhanden sind) mit dem Risiko, eventuell überzählige Passagiere mit Geld entschädigen zu müssen. Angenommen, die Fluggesellschaft hat bei jedem mitfliegenden Fluggast Einnahmen von $a = 300$ Euro, für jede überzählige Person jedoch einen Verlust von $b = 500$ Euro. Wir nehmen ferner an, dass jede Person, die einen Platz gebucht hat, unabhängig von den anderen Passagieren mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,95$ zum Flug erscheint. Wie viele Plätze würden Sie bei einem

- (a) Airbus A319 mit $s = 124$ Sitzplätzen,
- (b) Airbus A380 mit $s = 549$ Sitzplätzen

verkaufen, um den zu erwartenden Gewinn zu maximieren?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Bernoulli-Folge zu p , $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, sowie G_n der Gewinn bei n verkauften Plätzen, so gilt

$$G_{n+1} - G_n = a \cdot I_{\{S_n < s\}} X_{n+1} - b \cdot I_{\{S_n \geq s\}} X_{n+1}$$

Folgern Sie, dass $E[G_{n+1}] \geq E[G_n]$ genau dann gilt, wenn $P[S_n < s] \geq \frac{b}{a+b}$, und verwenden Sie die Normalapproximation der Binomialverteilung.

4. (Ausfallraten) Sei T eine positive absolutstetige Zufallsvariable mit stetiger Dichtefunktion f . Wir definieren die *Ausfallrate* r durch

$$r(t) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P[T \leq t + h | T > t], \quad t \geq 0.$$

- (a) Zeige: $r(t) = H'(t) = f(t)/(1 - F(t))$, wobei F die Verteilungsfunktion von T und $H(t) := -\log(1 - F(t))$ ist.
- (c) Berechne die Ausfallrate in dem Fall, dass T eine Weibull-Verteilung besitzt, d.h.

$$P[T > t] = \exp(-\alpha t^{\beta-1}).$$

Was ergibt sich, falls T exponentialverteilt ist ?