**Institut für angewandte Mathematik**
**Wintersemester 13/14**
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

# 3. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

**Abgabe bis Di 5.11., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)**

---

**1. (Satz von de Moivre-Laplace)**

(a) Formulieren Sie die Aussage des Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace, und skizzieren Sie den Beweis. Die Beweisskizze sollte alle wesentlichen Approximationsschritte enthalten - Sie brauchen die einzelnen Schritte aber nicht vollständig rigoros auszuführen.

(b) Ein Hotel hat 200 Betten. Wie viele Reservierungen darf der Hotelmanager akzeptieren, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit 20 % Wahrscheinlichkeit annulliert wird, und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens $2,5$ % sein soll?

**2. (Normalverteilung)** Sei $Z$ eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable.

(a) Die Verteilung von $Y := e^Z$ heißt *log-Normal-Verteilung*. Zeigen Sie, daß diese Verteilung absolutstetig ist, und berechnen Sie die Dichte.

(b) Beweisen Sie die Abschätzung

$$P[Z \geq x] \;\leq\; \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**3. (Transformationen von stetigen Zufallsvariablen)**

(a) Sei $Z$ eine mit Parametern $m$ und $\sigma^2$ normalverteilte Zufallsvariable, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeige, dass die Zufallsvariable $X := aZ+b$ die Verteilung $N(am+b, a^2\sigma^2)$ hat. Welche Verteilung hat $X$ im Fall $a = 0$ ?

(b) Im Abstand $a$ von einer Geraden befinde sich eine Glühbirne, die gleichmäßig in alle Richtungen strahlt, die die Gerade irgendwann treffen. $X$ bezeichne den Auftreffpunkt eines Lichtstrahls auf der Geraden. Der Punkt auf der Geraden, der der Glühbirne am nächsten liegt, sei mit $x = 0$ bezeichnet. Zeige, dass die Verteilung $\mu_X$ absolutstetig ist mit Dichtefunktion

$$f_X(x) \;=\; \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}\;.$$

Diese Verteilung wird als *Cauchyverteilung zum Parameter* $a$ bezeichnet.

**4. (Zufallsvariablen,Verteilungsfunktion)**

(a) Seien $X, Y, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertige Zufallsvariablen. Zeige, dass auch die folgenden Abbildungen Zufallsvariablen sind:

$$X \cdot Y, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} X_n \ .$$

Folgere, dass die Menge $M = \{\omega \in \Omega \ : \ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existiert}\}$ messbar ist.

(b) Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Verteilungsfunktionen der folgenden Zufallsvariablen:

$$Y_1 = aX + b, \qquad Y_2 = |X|, \qquad Y_3 = e^X.$$