Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 13/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung/Patrick Müller

2. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 29.10., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (MZ)

Allgemeine Informationen. Für jede Aufgabe gibt es maximal 4 Punkte, wobei sich die Punktezahl sowohl aus Bearbeitungsgrad als auch Richtigkeit der Lösung zusammensetzt :

- 4 Punkte : überwiegend korrekte Lösung aller Teilaufgaben,
- 3 Punkte : Lösungsansätze zu allen Teilaufgaben; teilweise korrekt,
- entsprechend reduzierte Punktezahl falls nur Teile sinnvoll bearbeitet sind.

Die Abgabe kann in Zweier- oder Dreier-Gruppen stattfinden. Zulassungskriterien zur Prüfung:

- regelmäßige aktive Teilnahme am Tutorium
- bei einer 2er Gruppe: 60% der zu erreichenden Punkte;
- bei einer 3er Gruppe: 70 % der zu erreichenden Punkte.

---

1. (Verteilungsfunktion und Simulation von reellwertigen Zufallsvariablen) [SEHR WICHTIGE AUFGABE !] Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(c) \ := \ P[X \leq c] \ = \ P[X^{-1}((-\infty, c])], \quad c \in \mathbb{R},$$

heißt *Verteilungsfunktion* von X.

a) Zeige : F ist monoton wachsend und rechtsstetig mit

$$\lim_{c \to -\infty} F(c) \ = \ 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{c \to \infty} F(c) \ = \ 1 \,.$$

b) Sei $\mathcal{U}_{(0,1)}$ die Gleichverteilung auf $(0,1)$. Wie sieht der Graph von F aus, falls die Verteilung von X gleich $\frac{1}{2}\mathcal{U}_{(0,1)} + \frac{1}{2}\delta_2$ ist ?

c) Für $u \in (0,1)$ sei

$$G(u) \ := \ \inf \{c \in \mathbb{R} |\, F(c) \geq u\} \ = \ \sup \{c \in \mathbb{R} |\, F(c) < u\}$$

die *„linksstetige verallgemeinerte Inverse"* von F. Skizziere G für das Beispiel aus b). Zeige allgemein, daß G eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \mathcal{U}_{(0,1)})$$

ist, die dieselbe Verteilung wie X unter P hat. (*Ein Element $u \in (0,1)$ repräsentiert z.B. eine vom Computer erzeugte „Zufallszahl". Die Transformation $u \mapsto G(u)$ liefert eine Möglichkeit, die Zufallsvariable X auf dem Computer zu simulieren.)*

2. (Münzwurfsequenzen) Wir betrachten das Modell für unendlich viele faire Münzwürfe aus der Vorlesung.

a) Zeige :

$$P\,[\,\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega \,|\, \omega_i = 1 \text{ unendlich oft}\}\,] \;=\; 1\,.$$

b) Allgemeiner sei $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ eine beliebige endliche Sequenz von Nullen und Einsen. Zeige, daß mit Wahrscheinlichkeit 1 das ,,Wort" $(a_1, \ldots, a_k)$ unendlich oft in der Münzwurffolge $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ vorkommt.

3. (σ-Algebren)

a) Sei Ω eine nichtleere Menge, und $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeige, dass $\sigma(\mathcal{J})$ eine σ-Algebra ist.

b) Folgere, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alle abgeschlossenen und halboffenen Intervalle enthält.

c) Zeige $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \;=\; \sigma\,(\,(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\,)$. Wie sieht ein möglichst einfaches Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ aus ?

4. (Stichproben und elementare Verteilungen)

a) Eine Lieferung enthält 90 funktionsfähige und 10 defekte Notebooks. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe von 10 Notebooks kein defektes enthält ?

b) Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn stattdessen zehnmal unabhängig eine Einzelstichprobe entnommen wird ? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zweien dieser Einzelstichproben derselbe Laptop geprüft wird ?

c) Eine grosse Anzahl n verschiedener Briefe wird zufällig vermischt und auf n voradressierte Briefumschläge verteilt. Wie hoch ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest einer der Briefe den richtigen Empfänger erreicht ?

5. ([Zusatzaufgabe] Eine nicht meßbare Teilmenge von S^1) Sei $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Betrachte die Äquivalenzklassen auf S^1 bzgl. der Relation

$$z \sim w \qquad \Leftrightarrow \qquad z = e^{i\alpha} w \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{Q}\;.$$

Folgere aus dem Auswahlaxiom die Existenz von disjunkten Mengen A_q, $q \in \mathbb{Q}$, die alle auseinander durch Rotation um den Ursprung hervorgehen, so daß

$$S^1 \;=\; \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q\,.$$

Erkläre anschaulich, warum die Existenz des zweidimensionalen Lebesguemaßes impliziert, daß die Mengen A_q nicht Borelsch sind.

Bemerkung: Das Banach-Tarski-Paradox besagt, daß eine Teilmenge F der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ existiert, sodaß sich S^2 für jedes $3 \leq k \leq \infty$ als disjunkte Vereinigung von k Mengen schreiben läßt, die alle durch Rotation von F um den Nullpunkt entstehen !