Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 2013/14
Andreas Eberle, Lisa Hartung / Patrick Müller

Klausur „Einführung in die W'theorie"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben, von denen Sie 3 bearbeiten sollten. Bitte streichen Sie die nicht bearbeitete Aufgabe, da nur 3 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Pro Aufgabe können maximal 36 Punkte erreicht werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang einige Minuten Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 12.00 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4			**Summe**	**Note**
Punkte								

1. (Zufallsvariablen und ihre Verteilung)

a) Was ist eine reellwertige Zufallsvariable ? Wie sind die Verteilung und die Verteilungsfunktion definiert ? *[5 Pkt.]*

b) Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen:

$$\text{(i) } X \sim \mathrm{N}(3,9), \qquad \text{(ii) } T \sim \mathrm{Exp}(5), \qquad \text{(iii) } \max(Z,0) \text{ mit } Z \sim \mathrm{N}(0,1).$$

[6]

c) Seien S und T unabhängige, zum Parameter $\lambda = 1$ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen und Dichten der Zufallsvariablen

$$\text{(i) } 1 - \exp(-T), \qquad \text{(ii) } -T, \qquad \text{(iii) } S - T.$$

[11]

d) Zeigen Sie: Für eine nicht-negative Zufallsvariable X gilt:

$$E[X] \;=\; \int_0^\infty (1 - F_X(c))\, dc.$$

[5]

e) Die gemeinsame Verteilung der reellwertigen Zufallsvariablen X und Y sei absolutstetig mit Dichte

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} ax & \text{für } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Konstante a, und berechnen Sie die Dichte von X, sowie die bedingte Dichte von Y gegeben X. Sind X und Y unabhängig ? *[9]*

2. (Zentraler Grenzwertsatz)

a) Was bedeutet Konvergenz in Verteilung einer Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zufallsvariablen (Definition) ? Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass aus Konvergenz in Verteilung nicht die Konvergenz der Verteilungen in Variationsdistanz folgt. *[5 Pkt.]*

b) Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz für unabhängige, identisch verteilte, quadratintegrierbare Zufallsvariablen. Nötige Aussagen aus der Analysis sowie der Konvergenzsatz von Lévy können ohne Beweis vorausgesetzt werden - die verwendeten Aussagen sollten aber vollständig mit Voraussetzungen angegeben werden. *[15]*

c) Seien U eine auf $(0,1)$ gleichverteilte, und Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable.

   (i) Zeigen Sie, dass $E[U] = 1/2$ und $\mathrm{Var}[U] = 1/12$ gilt. *[5]*

   (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $|Z|$. *[5]*

d) Sei S die Summe von 1200 unabhängigen, auf $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen U_i, $i = 1, 2, \dots, 1200$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P[S > 610]$ näherungsweise.

   Hinweis: Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z gilt:

$$P[|Z| > 1] \approx 0,317, \qquad P[|Z| > 2] \approx 0,046, \quad \text{und} \quad P[|Z| > 3] \approx 0,0026.$$

[6]

3. (Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen)

a) Seien $Z_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Wie sind die fast sichere Konvergenz, die stochastische Konvergenz, und die L^2-Konvergenz von $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Z definiert ? *[3 Pkt.]*

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$P[Z_n = n^\alpha] \;=\; \frac{1}{n}, \qquad P[Z_n = 0] \;=\; 1 - \frac{1}{n}$$

Zeigen Sie, dass (Z_n) genau dann in L^2 gegen 0 konvergiert, wenn $\alpha < 1/2$ ist. Wann konvergiert (Z_n) stochastisch gegen 0 ? *[6]*

c) Seien A_n $(n \in \mathbb{N})$ Ereignisse mit $\sum_{n=1}^\infty P[A_n] < \infty$. Zeigen Sie, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele der Ereignisse eintreten. *[5]*

d) Folgern Sie: Gilt für eine Folge (Z_n) von Zufallsvariablen

$$\sum_{n=1}^\infty P[|Z_n - Z| > \varepsilon] \;<\; \infty \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$

dann konvergiert (Z_n) fast sicher gegen Z. *[4]*

e) Seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige, auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen, und sei

$$Z_n \;=\; \min(U_1, \ldots, U_n).$$

Zeigen Sie:

(i) $Z_n \to 0$ P-fast sicher. *[5]*

(ii) Für die Zufallsvariablen $W_n := nZ_n$ gilt

$$P[W_n \le c] \;\longrightarrow\; \begin{cases} 1 - e^{-c} & \text{für } c > 0, \\ 0 & \text{für } c \le 0. \end{cases}$$

[5]

f) In einem Glücksspiel verdoppelt bzw. halbiert sich das Kapital des Spielers in jeder Runde mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $1-p$, $p \in (0,1)$. Sei Z_n das Kapital nach n Runden bei Startkapital $Z_0 = 1$.

(i) Beschreiben Sie Z_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ als Zufallsvariablen in einem geeigneten Modell. *[2]*

(ii) Für welche Werte von p konvergiert (Z_n) in L^2 gegen 0 ? *[3]*

(iii) Zeigen Sie, dass (Z_n) für $p < 1/2$ fast sicher gegen 0 konvergiert. *[3]*

4. (Entropie)

Seien μ und ν Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einer abzählbaren Menge S.

a) Wie ist die Entropie $H(\mu)$ definiert ? Zeigen Sie:

$$H(\mu \otimes \nu) \;=\; H(\mu) + H(\nu) \qquad \text{und} \qquad H(\mu^n) = nH(\mu) \;\text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

[*8 Pkt.*]

b) Berechnen Sie die Entropie der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

$$\text{(i) } \mu = \delta_a \;\; (a \in S), \qquad \text{(ii) } \mu = \mathcal{U}_S, \qquad \text{(iii) } \mu = \mathrm{Geom}(p) \;\; (0 < p < 1).$$

[*9*]

c) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilung μ. Geben Sie die Massenfunktion p_n von $(X_1, \ldots, X_n)$ explizit an, und zeigen Sie

$$\frac{1}{n} \log p_n(X_1, \ldots, X_n) \;\longrightarrow\; -H(\mu) \qquad P\text{-fast sicher.}$$

[*6*]

d) Sei $\varepsilon > 0$. Folgern Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten der Mengen

$$B_{n,\varepsilon} \;:=\; \left\{ x \in S^n \,:\, e^{-n(H(\mu)+\varepsilon)} \leq p_n(x_1, \ldots, x_n) \leq e^{-n(H(\mu)-\varepsilon)} \right\}$$

unter dem Produktmaß μ^n für $n \to \infty$ gegen 1 konvergieren. [*4*]

e) Seien $A_n \subset S^n$ Mengen mit

$$\lim_{n\to\infty} P[(X_1, \ldots, X_n) \in A_n] \;=\; 1.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{A_n \cap B_{n,\varepsilon}} p_n(x_1, \ldots, x_n) \;=\; 1$$

gilt, und folgern Sie

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |A_n| \;\geq\; H(\mu).$$

[*9*]