Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

14. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 2.2., 12 Uhr,
Postfach im Schließfachraum gegenüber der Bibliothek (LWK)

---

1. (Grenzwertsatz für Poissonverteilungen)

a) Bestimmen Sie (z.B. mithilfe von charakteristischen Funktionen) die Verteilung der Summe von n unabhängigen Poissonverteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$.

b) Zeigen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes:

$$e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdot + \frac{n^n}{n!}\right) \;\to\; \frac{1}{2} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

2. (Summen und Quotienten unabhängiger Zufallsvariablen)
Seien X und Y unter P unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit absolutstetigen Verteilungen. Zeigen Sie:

a) Die Verteilung von $S = X + Y$ ist wieder absolutstetig mit Dichte

$$f_{X+Y}(z) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx.$$

b) Gilt $X > 0$ P-fast sicher, dann ist die Verteilung von $Z = Y/X$ absolutstetig mit Dichte

$$f_{Y/X}(z) \;=\; \int_0^{\infty} f_X(x)\, f_Y(zx)\, x\, dx.$$

c) Berechnen Sie die Verteilungen der Summe und des Quotienten von zwei unabhängigen, auf $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen U, V.

3. (Fehlerfortpflanzung bei transformierten Beobachtungen) Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten reellwertigen Zufallsvariablen mit endlicher Varianz $v > 0$ und Erwartungswert m. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(m) \neq 0$ und beschränktem f''. Zeigen Sie: Für $n \to \infty$ gilt

$$\frac{\sqrt{n/v}}{f'(m)} \left(f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) - f(m) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

(Hinweis: Verwenden sie die Taylor-Entwicklung von f im Punkt m und schätzen sie das Restglied mit der Tschebyscheff-Ungleichung ab.)

4. (Charakteristische Funktionen III) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist die charakteristische Funktion ϕ einer Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertig, so haben X und $-X$ dieselbe Verteilung.

b) Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z gilt

$$\mathbb{E}[Z^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

c) Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit charakteristischer Funktion $\exp(-|t^\alpha|)$, so besitzt $n^{-1/\alpha}\sum_{i=1}^{n} X_i$ dieselbe Verteilung wie X_1.