Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

13. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie”

Abgabe bis Di 26.01., 12 Uhr,
Postfach im Schließfachraum gegenüber der Bibliothek (LWK)

---

1. (Gesetz der großen Zahlen via charakteristische Funktionen)

a) Beweisen Sie *mithilfe von charakteristischen Funktionen* die folgende Version des schwachen Gesetzes der großen Zahlen : Sind $X_1, X_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ i.i.d. Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $E[X_i] = m$, dann konvergiert die Verteilung von $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ schwach gegen das Diracmaß δ_m.

b) Folgern Sie hieraus, daß $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ auch stochastisch gegen m konvergiert.

2. (Ratenfunktionen für große Abweichungen) Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit den unten angegebenen Verteilungen. Berechnen Sie jeweils die momentenerzeugenden Funktionen $M(t)$, und skizzieren Sie die Graphen von $\Lambda(t) = \log M(t)$, und von der Ratenfunktion I im Satz von Chernoff. Zeigen Sie, daß I die angegebene Form hat. Erklären Sie den Verlauf von I anschaulich.

a) Bernoulliverteilung mit Parameter $p \in (0, 1)$:
$I(a) = a \log \frac{a}{p} + (1 - a) \log \frac{1-a}{1-p}$ für $a \in [0, 1]$, $\quad I(a) = \infty$ für $a \notin [0, 1]$.

b) Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$:
$I(a) = \lambda a - 1 - \log(\lambda a)$ für $a > 0$, $\quad I(a) = \infty$ für $a \leq 0$.

3. (Konvergenz in Verteilung, Satz von Slutsky) Seien X_n, Y_n, X und Y Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X_n \to X$ und $Y_n \to Y$ in Verteilung.

a) Demonstrieren Sie anhand eines Beispiels, daß $X_n + Y_n$ nicht notwendig in Verteilung gegen $X + Y$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß diese Konvergenz gilt, wenn Y konstant ist.

4. (Brownsche Molekularbewegung) Ein schweres Teilchen erfahre durch zufällige Stöße von leichten Teilchen pro Zeiteinheit eine zufällige Geschwindigkeitsumkehr, d.h. für seine Ortskoordinate (in einer vorgegebenen Richtung) zur Zeit t gelte $X_t = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} V_i$ mit unabhängigen Geschwindigkeiten V_i, wobei $\mathbb{P}[V_i = \pm v] = \frac{1}{2}$ für ein $v > 0$. Geht man zu makroskopischen Skalen über, so wird das Teilchen zur Zeit t beschrieben durch die Zufallsvariable

$$B_t^{(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon} X_{\frac{t}{\varepsilon}} ,$$

wobei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie den Verteilungslimes B_t von $B_t^{(\varepsilon)}$ für $\varepsilon \searrow 0$ sowie dessen Dichte ρ_t. Zeigen Sie, dass diese Dichten die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \rho_t(x)}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \rho_t(x)}{\partial x^2}$$

mit einer geeigneten Diffusionskonstanten $D > 0$ erfüllen.