Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

12. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie”

Abgabe bis Di 19.1., 12 Uhr,
Postfach im Schließfachraum gegenüber der Bibliothek (LWK)

---

1. (Charakteristische Funktionen I)

a) Die *beidseitige Exponentialverteilung* ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\mathbb{R}$ mit Dichte $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Zeigen Sie: Die charakteristische Funktion von μ ist $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

b) Folgern Sie, daß $\varphi(t) = e^{-|t|}$ die charakteristische Funktion der Cauchyverteilung ist (Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$).

c) Zeigen Sie: Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Cauchyverteilte Zufallsvariablen, dann sind die empirischen Mittelwerte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$, auch Cauchyverteilt. Warum ist dies kein Widerspruch zum Gesetz der großen Zahlen ?

2. (Charakteristische Funktionen II)

a) Zeigen sie mithilfe von charakteristischen Funktionen: Sind X und Y unabhängige $\mathrm{Bin}(m, p)$ bzw. $\mathrm{Bin}(n, p)$-verteilte Zufallsvariablen, dann ist $X + Y$ $\mathrm{Bin}(m + n, p)$-verteilt.

b) Sind X und Y unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1, und stimmt die Verteilung der Zufallsvariablen $(X + Y)/\sqrt{2}$ mit der von X und Y überein, dann sind X und Y normal verteilt.
Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass aus den Voraussetzungen eine Gleichung der Form $\varphi(t) = [\varphi(?)]^2$ für die charakteristische Funktion folgt. Iterieren Sie die Gleichung, und verwenden Sie die Taylorentwicklung $\varphi(t) = 1 - t^2/2 + o(t^2)$.

3. (Relative Entropie I) Seien μ und ν Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einer endlichen Menge S mit $\mu \ll \nu$. Die Größe

$$H(\mu|\nu) = \sum_{x\in S,\ \nu(x)\neq 0} \frac{\mu(x)}{\nu(x)} \log\left(\frac{\mu(x)}{\nu(x)}\right) \nu(x)$$

heißt *relative Entropie* von μ bzgl. ν. Zeigen Sie:

a) $H(\mu|\nu) \geq 0$, sowie $H(\mu|\nu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \nu$

b) Ist ν die Gleichverteilung auf S, so gilt

$$H(\mu|\nu) = \log|S| - H(\mu).$$

c) Für W-Maße μ_i, ν_i, $i = 1, 2$, mit $\mu_i \ll \nu_i$ gilt

$$H(\mu_1 \otimes \mu_2 | \nu_1 \otimes \nu_2) = H(\mu_1|\nu_1) + H(\mu_2|\nu_2).$$

d) Sei μ_p die Bernoulliverteilung zum Parameter $p \in (0,1)$. Zeigen sie für $a, p \in (0,1)$:

$$H(\mu_a|\mu_p) = a\log(\frac{a}{p}) + (1-a)\log(\frac{1-a}{1-p})$$

4. (Relative Entropie II: Satz von Shannon-MacMillan) Seien μ und ν Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $S = \mathbb{R}^d$ (oder einem diskreten Raum S) mit Dichtefunktionen (bzw. Massenfunktionen) $f, g > 0$, und sei

$$\rho_n(x_1, \dots x_n) := \frac{d\mu^n}{d\nu^n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i), \quad \rho(x) := \frac{d\mu}{d\nu}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

der Quotient der Dichten für n unabhängige Stichproben von μ bzw. ν (*"Likelihoodquotient"*). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sind $X_1, X_2, \dots : \Omega \to S$ unabhängige Zufallsvariablen unter $\mathbb{P}_\mu$ bzw. $\mathbb{P}_\nu$ mit Verteilung μ bzw. ν, dann gilt für $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n}\log\rho_n(X_1, \dots, X_n) \to H(\mu|\nu) \quad \mathbb{P}_\mu\text{-f.s., und}$$
$$\frac{1}{n}\log\rho_n(X_1, \dots, X_n) \to -H(\nu|\mu) \quad \mathbb{P}_\nu\text{-f.s.,}$$

wobei $H(\mu|\nu) := \int \rho\log\rho \, d\nu \in [0, \infty]$ die *relative Entropie* von μ bzgl. ν ist.

b) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Folge

$$B_{n,\varepsilon} := \{(x_1, \dots, x_n) | e^{n(H(\mu|\nu)-\varepsilon)} \leq \rho_n(x_1, \dots, x_n) \leq e^{n(H(\mu|\nu)+\varepsilon)}\} \subseteq S^n$$

wesentlich bzgl. μ, und

$$\nu^n[B_{n,\varepsilon}] \leq e^{-n(H(\mu|\nu)-\varepsilon)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

c) Für beliebige meßbare Mengen $A_n \subseteq S^n$ mit $\underline{\lim}\ \mu^n[A_n] > 0$ gilt

$$\underline{\lim}\ \frac{1}{n}\log\nu^n[A_n] \geq -H(\mu|\nu).$$

d) Erläutern Sie, warum der Maßkonzentrationssatz aus der Vorlesung ein Spezialfall der oben gezeigten Aussage ist.