Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

11. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 12.01., 12 Uhr,
Postfach im Schließfachraum gegenüber der Bibliothek (LWK)

---

1. (Gesetz der großen Zahlen für korrelierte Zufallsvariablen)
Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, quadratintegrierbare Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit festem Erwartungswert $E[X_i] = m \ \forall\, i \in \mathbb{N}$. Es gelte

$$|\mathrm{Cov}\,[X_i, X_j]| \ \leq \ \varepsilon_{|i-j|} \qquad \forall\, i, j \in \mathbb{N}$$

mit endlichen Konstanten $\varepsilon_n \in (0, \infty)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Beweisen Sie die folgenden Erweiterungen der $\mathcal{L}^2$-Versionen des schwachen und starken Gesetzes der großen Zahlen :

a) Konvergiert $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \to m \qquad \text{in } \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \text{ und } \mathbb{P}\text{-stochastisch.}$$

b) Gilt sogar $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, dann ist $\mathrm{Var}[S_n/n]$ von der Ordnung $O(1/n)$, und es folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \to m \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

c) Folgern Sie, dass ein starkes Gesetz der großen Zahlen gilt, wenn die Inkremente X_i durch einen stationären AR(1)-Prozeß gegeben sind (siehe Blatt 10, Aufgabe 3), d.h. wenn

$$X_n \ = \ \alpha X_{n-1} + \varepsilon Z_n$$

mit $\alpha \in (-1, 1)$, X_0, $Z_1, Z_2, \ldots$ unabhängig mit $Z_n \sim N(0, 1)$, und $X_0 \sim N(0, \frac{\varepsilon^2}{1-\alpha^2})$.

2. (Schätzen von Kenngrößen einer unbekannten Verteilung) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger Stichproben von einer unbekannten Verteilung μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\int x^2 \,\mu(dx) < \infty$. Zeigen Sie:

a) Die *Stichprobenmittel*

$$\bar{X}_n(\omega) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega), \qquad n \in \mathbb{N},$$

sind *erwartungstreue* Schätzer des Mittelwerts $m = \int x\,\mu(dx)$ der Verteilung, d.h.,

$$\mathbb{E}\left[\bar{X}_n\right] \;=\; m \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Schätzfolge ist *konsistent*, d.h.

$$\bar{X}_n \;\longrightarrow\; m \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

b) Die *renormierten Stichprobenvarianzen*

$$\tilde{V}_n(\omega) \;=\; \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i(\omega)-\bar{X}_n(\omega)\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N},$$

bilden eine konsistente Folge von erwartungstreuen Schätzern für die Varianz der Verteilung μ.

c) Die *empirischen Verteilungen*

$$L_n(\omega) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i(\omega)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

bilden in folgendem Sinn eine konsistente Folge von erwartungstreuen Schätzern für die gesamte Verteilung μ : Für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ ist $\int f\,dL_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine konsistente Folge von erwartungstreuen Schätzern für $\int f\,d\mu$.

*d) *(Zusatzaufgabe).* Ist die Verteilungsfunktion $F(c) = \mu[(-\infty, c]]$ stetig, dann konvergieren die empirischen Verteilungsfunktionen

$$F_n(c) \;:=\; L_n[(-\infty, c]] \;=\; \frac{1}{n}\left|\{1 \le i \le n : X_i \le c\}\right|, \qquad c \in \mathbb{R},$$

fast sicher gleichmäßig gegen F.

3. (Normale Zahlen) Eine Zahl $u \in [0,1)$ heißt *normal*, falls Folgendes gilt: Für alle $q \geq 2$ und $k \geq 1$ kommt in der q-adischen Dastellung

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} u_i q^{-i}$$

jede Ziffernfolge $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \{0, \ldots, q-1\}^k$ mit relativer Häufigkeit q^{-k} vor, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{1 \le i \le n \;:\; (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+k-1}) = a\right\}\right| \;=\; q^{-k}\,.$$

Zeigen Sie, dass bezüglich der Gleichverteilung auf $[0,1)$ fast jede Zahl normal ist.

4. (Entropiemaximierung unter Nebenbedingungen) Sei S ein endlicher Zustandsraum, und $H : WV(S) \to [0,\infty)$ das Entropiefunktional auf dem Raum

$$WV(S) \;=\; \left\{\mu \in \mathbb{R}^S \;\middle|\; \sum_{x\in S}\mu(x) = 1,\; \mu(x) \geq 0\,\forall\,x\right\}$$

der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf S.

a) Zeigen Sie, dass H strikt konkav ist.

b) Sei $U : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf S. Für $\beta \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\mu_\beta(x) \;=\; \frac{e^{\beta U(x)}}{Z_\beta} \quad (x \in S) \qquad \text{mit} \qquad Z_\beta \;=\; \sum_{x \in S} e^{\beta U(x)}$$

(Boltzmann-Verteilung zur Energiefunktion $H = -U$ und Temperatur $T = 1/\beta$). Sei

$$m_\beta \;:=\; E_{\mu_\beta}[U] \;=\; \sum_{x \in S} U(x)\mu_\beta(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass μ_β die Entropie unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ν auf S mit $E_\nu[U] = m_\beta$ maximiert.

Revisionsaufgabe: Kolmogorovsches Gesetz der großen Zahlen

a) Studieren Sie den Beweis des Kolmogorovschen Gesetzes der großen Zahlen noch einmal genau und prägen Sie sich die wesentlichen Beweisschritte ein.

b) Geben Sie die Aussage und den Beweis vollständig wieder. Nennen Sie dazu zunächst die wesentlichen Beweisschritte, und versuchen Sie anschließend, die Beweise der einzelnen Schritte selbstständig auszuarbeiten. Verwenden Sie die Vorlesungsmitschrift nur notfalls, wenn Sie beim Beweis eines Schrittes keinen Ansatzpunkt sehen.

c) Warum und an welcher Stelle ist die Unabhängigkeit eine zentrale Voraussetzung? Warum kann man den Beweis nicht auf ähnliche Weise führen, wenn statt Unabhängigkeit nur Unkorreliertheit vorausgesetzt wird?

Wir wünschen Ihnen fröhliche Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2010 !