Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

10. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 22.12., 12 Uhr,
Postfach im Schließfachraum gegenüber der Bibliothek (LWK)

---

1. (Bernsteinpolynome) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, und

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ für } p \in [0, 1]$$

das zugehörige *Bernstein-Polynom* n-ten Grades. Stellen Sie $f_n(p)$ in der Form

$$f_n(p) = E\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]$$

mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ dar. Folgern Sie, daß die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert.

2. (Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen)

a) Seien $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie: Konvergiert $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{P}$-stochastisch gegen 0, dann existiert eine Teilfolge $(Y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die $\mathbb{P}$-fast-sicher gegen 0 konvergiert.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für $p \in [1, \infty)$ aus $\mathcal{L}^p$-Konvergenz stochastische Konvergenz folgt. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

3. (Autoregressiver Prozeß) Seien $\varepsilon, \alpha \in \mathbb{R}$, sowie X_0 und Z_n ($n \in \mathbb{N}$) unabhängige reelle Zufallsvariablen mit $Z_n \sim N(0,1)$. Wir betrachten den durch

$$X_n := \alpha X_{n-1} + \varepsilon Z_n \ , \qquad n \in \mathbb{N},$$

definierten AR(1)-Prozess. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls $X_{n-1} \sim N(m, \sigma^2)$, so gilt $X_n \sim N(\alpha m, \alpha^2 \sigma^2 + \varepsilon^2)$.

b) Für $|\alpha| < 1$ ist $\mu := N(0, \frac{\varepsilon^2}{1-\alpha^2})$ ein *Gleichgewicht*, d.h.

$$X_0 \sim \mu \quad \Longrightarrow \quad X_n \sim \mu \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

c) Falls $X_0 \sim \mu$, so gilt

$$\mathrm{Cov}[X_n, X_{n-k}] \ = \ \alpha^k \frac{\varepsilon^2}{1-\alpha^2} \qquad \text{für alle } 0 \leq k \leq n.$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis voraussetzen, dass für einen bivariat normalverteilten Zufallsvektor (X, Y) jede Linearkombination $aX + bY$, $a, b \in \mathbb{R}$, normalverteilt ist.

4. (Unabhängigkeit und Unkorreliertheit)

a) Seien $X : \Omega \to S$ und $Y : \Omega \to T$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in messbaren Räumen $(S, \mathcal{S})$ und $(T, \mathcal{T})$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   i) X und Y sind unabhängig.

   ii) $f(X)$ und $g(Y)$ sind unkorreliert für alle messbaren Funktionen f, g mit $f(X),\ g(Y) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

b) Seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ unabhängig. Zeigen Sie, dass gilt:

$$X \cdot Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$