Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

9. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 15.12., 12 Uhr,
Postfach im Schließfachraum gegenüber der Bibliothek (LWK)

---

1. (Bivariate Normalverteilung, Berechnung von Momenten)

a) Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, und $\rho \in (-1, 1)$ reelle Konstanten. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-Q(x)/2},$$

$$Q(x) = \frac{1}{(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \cdot \frac{x_1-m_1}{\sigma_1} \cdot \frac{x_2-m_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ im $\mathbb{R}^2$ ist, und berechnen Sie die Erwartungswerte, die Varianzen, und die Kovarianz von Zufallsvariablen X_1, X_2 mit gemeinsamer Verteilung μ.

b) Die *momentenerzeugende Funktion* einer reellen Zufallsvariable X ist definiert durch

$$M(t) := \mathbb{E}\left[\exp(tX)\right], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die momentenerzeugende Funktion in den folgenden Fällen :

i) X ist binomialverteilt zu den Parametern (n, p),

ii) X ist exponentialverteilt zum Parameter λ,

iii) X ist $N(m, \sigma^2)$-verteilt.

Wie kann man die Momente $\mathbb{E}[X^n]$, $n \in \mathbb{N}$, berechnen, wenn man die Funktion M kennt ?

2. (Positive Korrelation monotoner Zufallsvariablen) Sei $(S, \mathcal{S}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $f, g \in \mathcal{L}^2(S, \mathcal{S}, \mu)$. Zeigen Sie : Sind X und Y unabhängige S-wertige Zufallsvariablen mit Verteilung μ, so gilt

$$\mathrm{Cov}_\mu[f, g] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\big(f(X) - f(Y)\big)\big(g(X) - g(Y)\big)\right].$$

Folgern Sie, dass im Fall $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$Cov_\mu[f, g] \geq 0$$

gilt, falls f und g beide monoton wachsend sind.

3. (Zufällige Bewegungen)

a) Ein Tierchen bewegt sich wie folgt zufällig in einer Ebene: Es läuft eine Streckeneinheit weit in eine zufällige Richtung Ψ_1, sucht sich dann eine neue zufällige Richtung Ψ_2 und läuft wieder eine Streckeneinheit weit, usw. Hierbei seien die Winkel Ψ_i unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 2\pi)$. Es sei D_n der Abstand vom Startpunkt zur Position nach dem n-ten Schritt. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}\left[D_n^2\right]$.

b) Im Ursprung der Ebene befinden sich zur Zeit $t = 0$ genau 30 Tierchen, die sich wie in a) unabhängig voneinander bewegen. Die Tierchen benötigen für jeden Schritt eine Zeiteinheit. Bestimmen Sie zu jedem $n \geq 1$ ein möglichst kleines $r_n > 0$ mit der Eigenschaft: Mit Wahrscheinlichkeit ≥ 0.9 befinden sich zur Zeit $t = n$ mehr als 15 Tierchen in dem Kreis mit Radius r_n um den Ursprung.
Hinweis : Bestimmen Sie zunächst ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft: Sind $Z_1, \ldots, Z_{30}$ unabhängig und Bernoulli-verteilt zum Parameter $p \geq 0.5 + \delta$, so ist

$$\mathbb{P}[\sum_{i=1}^{30} Z_i > 15] \geq 0.9$$

4. (Absolutstetigkeit bei Münzwurfmodellen)

a) Seien μ und ν die Wahrscheinlichkeitsmaße aus den Münzwurfmodellen mit Erfolgswahrscheinlichkeiten p bzw. q auf $\{0, 1\}^n$. Zeigen Sie : Ist $q \in (0, 1)$, so gilt $\mu \ll \nu$. Geben Sie $\frac{d\mu}{d\nu}$ an!

b) Seien μ und ν nun die Wahrscheinlichkeitsmaße aus den Münzwurfmodellen mit Erfolgswahrscheinlichkeiten p bzw. q auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass μ für $q \neq p$ *nicht* absolutstetig bzgl. ν ist.