Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

8. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 8.12., 12 Uhr,
Postfach im Schließfachraum gegenüber der Bibliothek (LWK)

---

1. (Berechnung von Erwartungswerten) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ in den folgenden Fällen:

a) X ist gleichverteilt auf $[0,1]$.

b) Die Verteilung von X ist absolutstetig mit Dichte $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) $X = e^Y$ für eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable Y.

2. (Waldsche Identität) Seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i \in \mathbb{N})$ und $T : \Omega \to \mathbb{N}$ unabhängige, integrierbare Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Die Zufallsvariablen X_i, $i \in \mathbb{N}$, seien identisch verteilt. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{T} X_i\right] \;=\; \mathbb{E}[T] \cdot \mathbb{E}[X_1].$$

3. (Erwartungswert und Median als beste L^p-Approximationen) Zeigen sie für eine reelle Zufallsvariable X:

a) *Der Erwartungswert minimiert die quadratische Abweichung:* Ist $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, so gilt

$$\mathbb{E}[(X-a)^2] \;\geq\; \mathrm{Var}[X] \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = \mathbb{E}[X]$.

b) *Der Median minimiert die absolute Abweichung:* Ist $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, und μ ein Median von X, so gilt

$$\mathbb{E}[|X-a|] \;\geq\; \mathbb{E}[|X-\mu|] \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn auch a ein Median von X ist.

Hinweis: Nehmen sie ohne Einschränkung an, dass $a < \mu$, und verifizieren Sie die Gleichung

$$|X-a| - |X-\mu| = (\mu - a)(2I_{\{X \geq \mu\}} - 1) + 2(X-a)I_{\{a<X<\mu\}}.$$

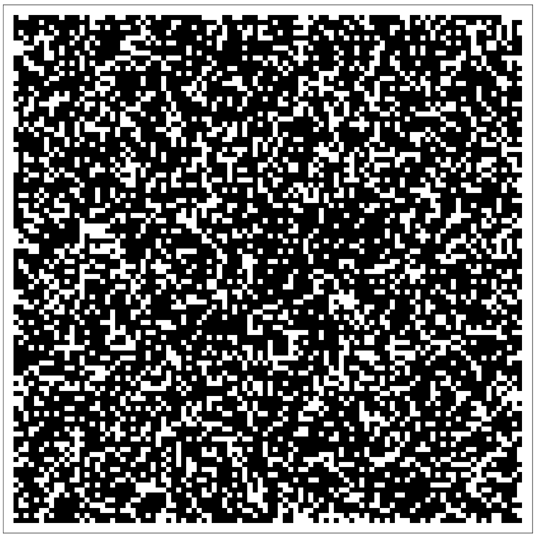 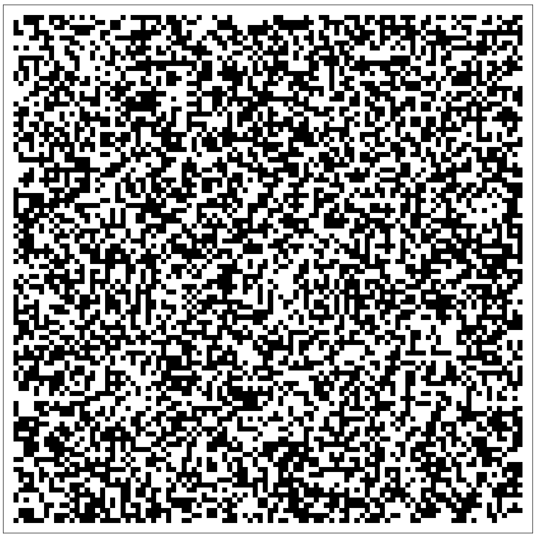

Abbildung 1: Perkolation in Dimension $d = 2$ mit $p = 0.7$ und $p = 0.5$

4. (Perkolation)
Sei $p \in [0, 1]$. Wir betrachten unabhängige Zufallsvariablen X_i, $i \in \mathbb{Z}^d$, mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1 - p$. Der Gitterpunkt $i \in \mathbb{Z}^d$ heißt *durchlässig*, falls $X_i = 1$ gilt. Sei A das Ereignis, daß eine unendliche Zusammenhangskomponente aus durchlässigen Gitterpunkten existiert. A_0 sei das Ereignis, daß der Nullpunkt in einer unendlichen Zusammenhangskomponente von durchlässigen Punkten enthalten ist. Zeigen Sie:

a) Im Fall $d = 1$, $p < 1$, gilt $P[A] = 0$.

b) Für alle $d \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ gilt:

$$P[A] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P[A_0] > 0.$$