Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

7. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 1.12., 12 Uhr,
Postfach im Schließfachraum gegenüber der Bibliothek (LWK)

---

1. (Acceptance-Rejection Sampling) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien μ und ν Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}$ mit Dichten f bzw. g. Es gelte :

$$g(x) \;>\; 0 \quad \text{und} \quad \rho(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \;\leq\; C \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

mit einer Konstanten $C \in (1, \infty)$.

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung ν und $U : \Omega \to (0,1)$ eine hiervon unabhängige auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mu[B] = \mathbb{P}\left[X \in B \;\middle|\; U \leq \frac{\rho(X)}{C} \right] \quad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,,$$

d.h. μ ist bedingte Verteilung von X gegeben $U \leq \frac{\rho(X)}{C}$.

b) Seien nun $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ und $U_1, U_2, \ldots : \Omega \to (0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung ν bzw. $\mathcal{U}_{(0,1)}$. Zeigen Sie : Dann ist

$$T \;:=\; \min\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; U_n \leq \frac{\rho(X_n)}{C} \right\} \qquad (\textit{Abbruchzeit})$$

$\mathbb{P}$-f.s. endlich, und die (für $\mathbb{P}$-f.a. ω eindeutig definierte) Zufallsvariable

$$Y(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$$

hat Verteilung μ.

c) Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Simulation von Stichproben von μ, wenn wir bereits Stichproben von ν simulieren können. Wie groß ist die mittlere Laufzeit des Algorithmus ? Wie sollte man C wählen ?

2. (Zufällige Permutationen) Sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf der Menge Ω der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$. Für eine Permutation ω bezeichne $X(\omega)$ die Anzahl der Fixpunkte. Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; E[X^2] - E[X]^2 \;.$$

Hinweis : $X = \sum_{i=1}^{n} I_{\{\omega\in\Omega|\omega(i)=i\}}$.

3. (Berechnung von Erwartungswerten aus der Verteilungsfunktion) Sei $T \geq 0$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Beweisen Sie, daß $x \mapsto \mathbb{P}[T > x]$ Borel–meßbar ist mit

$$E[T] \;=\; \int_0^\infty \mathbb{P}[T > x]\,dx \;=\; \int_0^\infty \big(1 - F_T(x)\big)\,dx.$$

Hinweis : Betrachten Sie zunächst den Fall, daß T nur endlich viele Werte $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_k$ annimmt. Zeigen Sie :

$$E[T] \;=\; \sum_{i=1}^{k}(c_i - c_{i-1})\,\mathbb{P}[T \geq c_i] \;=\; \int_0^\infty \mathbb{P}[T > x]\,dx\,.$$

4. (Asymptotische Ereignisse) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen positiven Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Welche der folgenden Ereignisse sind asymptotische Ereignisse ?

$$\{X_n > 2n \text{ unendlich oft}\},\ \{\liminf X_n < 17\},\ \{\inf X_n > 5\},$$
$$\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < 1\},\ \{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\},\ \{\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\}.$$

b) Geben Sie Beispiele von tail–field–meßbaren Zufallsvariablen an (mit Beweis).