Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

5. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 17.11., 12 Uhr,
Postfach im Schließfachraum gegenüber der Bibliothek (LWK)

---

1. (Konfidenzintervalle) Unter 100 Personen, die während eines Jahres den Führerschein erworben haben, verursachen 30 im Jahr darauf einen Schaden. Leiten Sie exakte und approximative Konfidenzintervalle zu den Konfidenzniveaus 80% und 90% für die Wahrscheinlichkeit p her, im Jahr nach Erwerb des Führerscheins einen Schaden zu verursachen.

2. (Unabhängigkeit und Verteilungsfunktionen) Seien X und Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen. Wir definieren $U = \min(X, Y)$ und $V = \max(X, Y)$. Zeigen Sie :

a) Die Verteilungsfunktionen von U und V sind gegeben durch:

$$F_U(u) \;=\; 1 - \big(1 - F_X(u)\big)\big(1 - F_Y(u)\big), \quad F_V(v) \;=\; F_X(v)F_Y(v)\;.$$

b) Sind X und Y beide exponentialverteilt zum Parameter 1, so ist U exponentialverteilt zum Parameter 2. Welche Dichte hat die Verteilung von V in diesem Fall? Skizzieren Sie die Dichte und interpretieren Sie die Ergebnisse anschaulich.

3. (Deterministische Zufallsvariablen) Zeigen Sie : Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann unabhängig von sich selbst, wenn eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\mathbb{P}[X = c] \;=\; 1\;.$$

4. (Rekorde) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit *stetiger* Verteilungsfunktion.

a) Zeigen Sie :
$$\mathbb{P}[X_n = X_m] \;=\; 0 \quad \text{für } n \neq m\;.$$

b) Seien $E_1 := \Omega$ und für $n \geq 2$,

$$E_n \;:=\; \{X_n > X_m \;\forall\, m < n\} \;=\; \{\text{„ein Rekord wird zur Zeit } n \text{ erreicht"}\}\;.$$

Zeige, dass die Ereignisse $E_1, E_2, \ldots$ unabhängig sind mit $\mathbb{P}[E_n] = 1/n$.