**Institut für angewandte Mathematik**
**Wintersemester 09/10**
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

# 4. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

**Abgabe bis Di 10.11., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (LWK)**

---

**1. (Satz von de Moivre-Laplace)**

(a) Formulieren Sie die Aussage des Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace, und skizzieren Sie den Beweis. Die Beweisskizze sollte alle wesentlichen Approximationsschritte enthalten - Sie brauchen die einzelnen Schritte aber nicht vollständig rigoros auszuführen.

(b) Ein Hotel hat 200 Betten. Wie viele Reservierungen darf der Hotelmanager akzeptieren, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit 20 % Wahrscheinlichkeit annulliert wird, und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens $2,5$ % sein soll?

**2. (Normalapproximation der Poissonverteilung)** Sei $N$ eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poissonverteilte Zufallsvariable. Beweise mithilfe der Stirlingschen Formel:

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left[a_\lambda \le N \le b_\lambda\right] \;=\; \Phi(b) - \Phi(a) \qquad \forall\ a < b$$

mit $a_\lambda := \lambda + a\sqrt{\lambda}$ und $b_\lambda := \lambda + b\sqrt{\lambda}$.

**3. (Normalverteilung)** Sei $Z$ eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable.

(a) Die Verteilung von $Y := e^Z$ heißt *log-Normal-Verteilung*. Zeigen Sie, daß diese Verteilung absolutstetig ist, und berechnen Sie die Dichte.

(b) Beweisen Sie die Abschätzung

$$P[Z \ge x] \;\le\; \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**4. (Überbuchungen)** Häufig ist die Zahl der zu einem Flug erscheinenden Passagiere geringer als die Zahl der Buchungen für diesen Flug. Die Fluggesellschaft praktiziert daher das sogenannte Überbuchen (d.h. sie verkauft mehr Tickets als Sitze vorhanden sind) mit dem Risiko, eventuell überzählige Passagiere mit Geld entschädigen zu müssen. Angenommen, die Fluggesellschaft hat bei jedem mitfliegenden Fluggast Einnahmen von $a = 300$€, für jede überzählige Person jedoch einen Verlust von $b = 500$€. Wir nehmen ferner an, dass jede Person, die einen Platz gebucht hat, unabhängig von den anderen Passagieren mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,95$ zum Flug erscheint. Wie viele Plätze würden Sie bei einem

(a) Airbus $A319$ mit $s = 124$ Sitzplätzen,

(b) Airbus $A380$ mit $s = 549$ Sitzplätzen

verkaufen, um den zu erwartenden Gewinn zu maximieren?
*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst: Ist $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Bernoulli-Folge zu $p$, $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, sowie $G_n$ der Gewinn bei $n$ verkauften Plätzen, so gilt

$$G_{n+1} - G_n = a \cdot I_{\{S_n < s\}} \, X_{n+1} + b \cdot I_{\{S_n \geq s\}} \, X_{n+1}$$

Folgern Sie, dass $E[G_{n+1}] \geq E[G_n]$ genau dann gilt, wenn $P[S_n < s] \geq \frac{b}{a+b}$, und verwenden Sie die Normalapproximation der Binomialverteilung.