Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

3. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 3.11., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (LWK)

---

1. (Zufallsvariablen) Seien $X, Y, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertige Zufallsvariablen. Zeige, dass auch die folgenden Abbildungen Zufallsvariablen sind:

$$X \cdot Y, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} X_n \ .$$

Folgere, dass die Menge $M = \{\omega \in \Omega \ : \ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existiert}\}$ messbar ist.

2. (Transformationen von stetigen Zufallsvariablen)

a) Sei Z eine mit Parametern m und σ^2 normalverteilte Zufallsvariable, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeige, dass die Zufallsvariable $X := aZ+b$ die Verteilung $N(am+b, a^2\sigma^2)$ hat. Welche Verteilung hat X im Fall $a = 0$?

b) Im Abstand a von einer Geraden befinde sich eine Glühbirne, die gleichmäßig in alle Richtungen strahlt, die die Gerade irgendwann treffen. X bezeichne den Auftreffpunkt eines Lichtstrahls auf der Geraden. Der Punkt auf der Geraden, der der Glühbirne am nächsten liegt, sei mit $x = 0$ bezeichnet. Zeige, dass die Verteilung μ_X absolutstetig ist mit Dichtefunktion

$$f_X(x) \ = \ \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} \ .$$

Diese Verteilung wird als *Cauchyverteilung zum Parameter* a bezeichnet.

3. (Ausfallraten) Sei T eine positive stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f. Wir definieren die *Ausfallrate* r durch

$$r(t) \ := \ \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\mathbb{P}[T \leq t+h | T > t], \quad t \geq 0.$$

a) Zeige: $r(t) = H'(t) = f(t)/(1-F(t))$, wobei F die Verteilungsfunktion von T und $H(t) := -\log(1-F(t))$ ist.

c) Berechne die Ausfallrate in dem Fall, dass T eine Weybullverteilung besitzt, d.h.

$$\mathbb{P}[T > t] = \exp(-\alpha t^{\beta-1}).$$

Was ergibt sich, falls T exponentialverteilt ist ?

4. (Negative Binomialverteilung) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Bernoulliverteilte Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Wir bezeichnen mit W_r die Wartezeit auf den r-ten Erfolg.

a) Zeige, dass W_r die sogenannte negative Binomialverteilung mit Parametern r und p besitzt:
$$\mathbb{P}[W_r = k] = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, \dots.$$

b) Stelle W_r als Summe von r unabhängigen Zufallsvariablen dar.