Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 09/10
Andreas Eberle, Bernhard Hader/Matthias Erbar

2. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Di 27.10., 12 Uhr, in der Mathematikbibliothek (LWK)

---

1. (Verteilungsfunktion und Simulation von reellwertigen Zufallsvariablen) [SEHR WICHTIGE AUFGABE !] Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) \;:=\; P[X \leq x] \;=\; P[X^{-1}((-\infty, x])], \quad x \in \mathbb{R},$$

heißt *Verteilungsfunktion* von X.

a) Zeige : F ist monoton wachsend und rechtsstetig mit

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) \;=\; 1\,.$$

b) Sei $\mathcal{U}_{(0,1)}$ die Gleichverteilung auf $(0,1)$. Wie sieht der Graph von F aus, falls die Verteilung von X gleich $\frac{1}{2}\mathcal{U}_{(0,1)} + \frac{1}{2}\delta_2$ ist ?

c) Für $u \in (0,1)$ sei

$$G(u) \;:=\; \inf\{x \in \mathbb{R} |\, F(x) \geq u\} \;=\; \sup\{x \in \mathbb{R} |\, F(x) < u\}$$

die *„linksstetige verallgemeinerte Inverse"* von F. Skizziere G für das Beispiel aus b). Zeige allgemein, daß G eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \mathcal{U}_{(0,1)})$$

ist, die dieselbe Verteilung wie X unter P hat.
(Ein Element $u \in (0,1)$ repräsentiert z.B. eine vom Computer erzeugte „Zufallszahl". Die Transformation $u \mapsto G(u)$ liefert eine Möglichkeit, die Zufallsvariable X auf dem Computer zu simulieren. Welche Probleme könnten dadurch entstehen, daß vom Computer erzeugte Zufallszahlen nie wirklich zufällig sind, sondern durch einen deterministischen Algorithmus generiert werden ? Für welche Arten von Verteilungsfunktion könnte es insbesondere Probleme geben ?)

2. (Münzwurfsequenzen) Wir betrachten das Modell für unendlich viele faire Münzwürfe aus der Vorlesung.

a) Zeige :

$$P\,[\,\{\omega = (x_1, x_2, \ldots) \in \Omega \,|\, x_i = 1 \text{ unendlich oft}\}\,] \;=\; 1\,.$$

b) Allgemeiner sei $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ eine beliebige endliche Sequenz von Nullen und Einsen. Zeige, daß mit Wahrscheinlichkeit 1 das „Wort" $(a_1, \ldots, a_k)$ unendlich oft in der Münzwurffolge $\omega = (x_1, x_2, \ldots)$ vorkommt.

3. (Summen unabhängiger Zufallsvariablen)

a) Seien X und Y unabhängige binomialverteilte Zufallsvariablen zu Parametern (n, p) bzw. (m, p). Bestimme die Verteilung von $X + Y$. *(Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, welche Zufallsgrößen durch eine Binomialverteilung modelliert werden)*

b) Seien X und Y unabhängige Poissonverteilte Zufallsvariablen zu Parametern μ bzw. ν. Bestimme die Verteilung von $X + Y$.

4. (Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen) Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einer abzählbaren Menge Ω.

a) Zeige, daß $\mathcal{P}$ konvex ist.

b) Beschreibe die Extremalpunkte von $\mathcal{P}$, und zeige, daß sich jedes $P \in \mathcal{P}$ als „Mischung" von Extremalpunkten darstellen läßt, d.h.

$$P = \sum_i \alpha_i P_i \qquad \text{mit} \ \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_i \alpha_i = 1, \ \ P_i \text{ extremal.}$$

5. ([Zusatzaufgabe] Eine nicht meßbare Teilmenge von S^1) Sei $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Betrachte die Äquivalenzklassen auf S^1 bzgl. der Relation

$$z \sim w \qquad \Leftrightarrow \qquad z = e^{i\alpha} w \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{Q} \ .$$

Folgere aus dem Auswahlaxiom die Existenz von disjunkten Mengen A_q, $q \in \mathbb{Q}$, die alle auseinander durch Rotation um den Ursprung hervorgehen, so daß

$$S^1 \ = \ \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q \, .$$

Erkläre anschaulich, warum die Existenz des zweidimensionalen Lebesguemaßes impliziert, daß die Mengen A_q nicht Borelsch sind.

Bemerkung: Das Banach-Tarski-Paradox besagt, daß eine Teilmenge F der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ existiert, sodaß sich S^2 für jedes $3 \leq k \leq \infty$ als disjunkte Vereinigung von k Mengen schreiben läßt, die alle durch Rotation von F um den Nullpunkt entstehen !