**Institut für angewandte Mathematik**
**Wintersemester 2009/10**
Andreas Eberle, Matthias Erbar, Bernhard Hader

# Klausur zu „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

# Musterlösungen

**1. (Reelle Zufallsvariablen)**

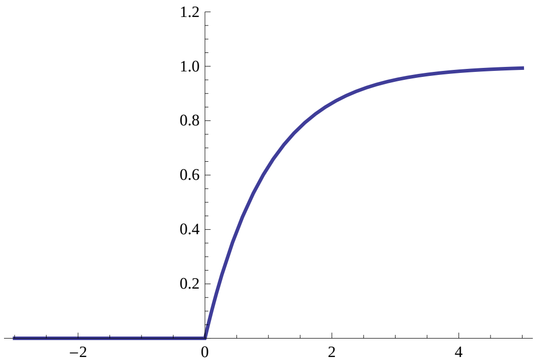
a) Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ (bzw. $\mathbb{R}$) der Verteilung $\mu$ ist definiert durch

$$F(c) \;=\; \mu\big[(-\infty, c]\big] \ .$$

b) Die Verteilungsfunktion $F$ berechnet sich jeweils wie folgt :

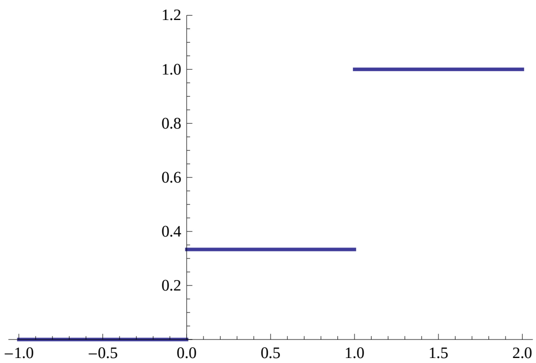
i) Sei $T \sim Exp(1)$. Dann gilt :

$$F(c) \;=\; \mathbb{P}\,[T \le c] \;=\; 1 - \mathbb{P}\,[T > c] \;=\; \begin{cases} 1 - e^{-c} \ , & \text{für } c \ge 0 \\ 0 \ , & \text{für } c < 0 \end{cases}$$



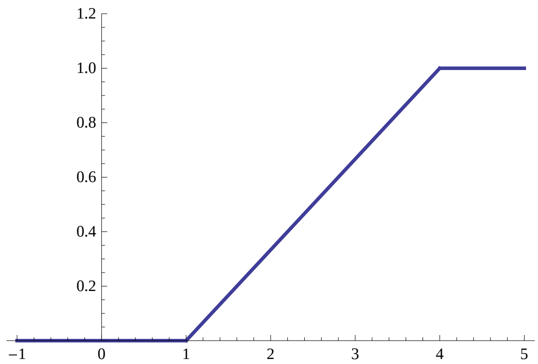

ii)

$$F(c) \;=\; \begin{cases} 0 \ , & \text{für } c < 0 \\ \frac{1}{3} \ , & \text{für } 0 \le c < 1 \\ 1 \ , & \text{für } c \ge 1 \end{cases}$$



iii)

$$F(c) \;=\; \begin{cases} 0\;, & \text{für } c \leq 1 \\ \frac{c-1}{3}\;, & \text{für } 1 \leq c \leq 4 \\ 1\;, & \text{für } c \geq 4 \end{cases}$$




c) $\underline{F \text{ ist monoton wachsend:}}$ Aus der Monotonie von $\mu$ folgt:

$$\begin{aligned} x \;\leq\; y \;\Rightarrow\; & (-\infty, x] \;\subseteq\; (-\infty, y] \\ \Rightarrow\; & F(x) \;=\; \mu\big[(-\infty, x]\big] \;\leq\; \mu\big[(-\infty, y]\big] \;=\; F(y)\;. \end{aligned}$$

$\underline{F \text{ ist rechtsstetig:}}$ Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $\varepsilon \downarrow 0$ :

$$F(x+\varepsilon) \;=\; \mu\big[(-\infty, x+\varepsilon]\big] \downarrow \mu\big[(-\infty, x]\big] \;=\; F(x)\;.$$

Denn für jede Nullfolge $\varepsilon_n \downarrow 0$ gilt wegen der monotonen Stetigkeit von $\mu$ :

$$\mu\big[(-\infty, x+\varepsilon_n]\big] \downarrow \mu\Big[\bigcap_n (-\infty, x+\varepsilon_n]\Big] \;=\; \mu\big[(-\infty, x]\big]\;.$$

<u>Grenzwerte:</u> Für jede Folge $c_n \uparrow \infty$ gilt :

$$\lim_{n\to\infty} F(c_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu\big[(-\infty, c_n]\big] \;=\; \mu\Big[\bigcup_n (-\infty, c_n]\Big] \;=\; \mu\big[\mathbb{R}\big] \;=\; 1\;.$$

Also $\lim\limits_{c\to\infty} F(c) = 1$. Ebenso gilt für jede Folge $c_n \downarrow -\infty$ :

$$\lim_{n\to\infty} F(c_n) \;=\; \mu\Big[\bigcap_n (-\infty, c_n]\Big] \;=\; \mu\big[\emptyset\big] \;=\; 0\;.$$

Also $\lim_{c\to-\infty} F(c) = 0$.

d) Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mu$ auf $\mathbb{R}$ heisst *absolutstetig*, genau dann wenn ein $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ existiert, so dass für die Verteilungsfunktion $F$ gilt:

$$F(c) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx\;.$$

Eine äquivalente Bedingung hierzu ist:

$$\mu[B] \;=\; \int_B f(x)dx \quad \text{für alle} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \;.$$

Ein Beispiel für eine Verteilung, die weder diskret noch absolutstetig ist, ist :

$$\mu \;=\; \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\mathcal{U}_{0,1} \;.$$

e) (i) Betimmung von $c$ :

$$\begin{aligned} 1 \;=\; \mu[\mathbb{R}] \;=\; \lim_{a\uparrow\infty} F(a) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= c\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\exp(-t^{\alpha})dt \\ &= c\int_0^{\infty} \exp(-u)\frac{1}{\alpha}du \;=\; \frac{c}{\alpha} \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde die Substitution $u = t^{\alpha},\; du = \alpha t^{\alpha-1}$ verwendet. Es folgt somit $c = \alpha$.

(ii) Für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt zunächst :

$$\mathbb{P}\left[X \geq s+t \,|\, X \geq t\right] \;=\; \frac{\mathbb{P}\left[X \geq s+t \;\wedge\; X \geq t\right]}{\mathbb{P}\left[X \geq t\right]} \;=\; \frac{\mathbb{P}\left[X \geq s+t\right]}{\mathbb{P}\left[X \geq t\right]} \;.$$

Mit Hilfe der Substitution $u = t^{\alpha}$ berechnet man weiter :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[X \geq s\right] \;&=\; \int_{t=s}^{\infty} \alpha t^{\alpha-1}\exp(-t^{\alpha})dt \\ &= \int_{u=s^{\alpha}}^{\infty} \exp(-u)du \;=\; \exp(-s^{\alpha}) \;. \end{aligned}$$

Zusammen folgt damit :

$$\mathbb{P}\left[X \geq s+t \,|\, X \geq t\right] \;=\; \frac{\exp\big(-(s+t)^{\alpha}\big)}{\exp\big(-t^{\alpha}\big)} \;\leq\; \exp\big(-s^{\alpha}\big) \;=\; \mathbb{P}\left[X \geq s\right] \;.$$

Denn für $\alpha \geq 0$ und $s, t \geq 0$ gilt die Ungleichung

$$(s+t)^{\alpha} \;\geq\; s^{\alpha} + t^{\alpha} \;.$$

Im Fall $\alpha = 1$ gilt Gleichheit (Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung).

**2. (Zentraler Grenzwertsatz)**

a) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i] = m$ und Varianz $Var[X_i] = \sigma^2$. Dann konvergieren die Zufallsvariablen

$$\tilde{S}_n \;:=\; \frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}}$$

in Verteilung gegen die Normalverteilung $N(0, \sigma^2)$.

b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und Bernoulliverteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, insbesondere $\mathbb{P}\,[X_i = \pm 1] = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{2}$, $Var[X_i] = \frac{1}{4}$. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt :

$$\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}\frac{1}{2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \; .$$

Hierbei ist in diesem Fall die Zufallsvariable $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ binomialverteilt mit Parametern $(n, \frac{1}{2})$. Damit folgt :

$$\begin{aligned}
\sum_{k:\left|k - \frac{n}{2}\right| \le \frac{1}{2}x\sqrt{n}} \binom{n}{k} 2^{-n} \;&=\; \mathbb{P}\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \le \frac{1}{2}x\sqrt{n}\right] \\
&=\; \mathbb{P}\left[\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} \le x\right] - \mathbb{P}\left[\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} < -x\right] \\
&\stackrel{*)}{\longrightarrow}\; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \;-\; \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&=\; \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \; .
\end{aligned}$$

Zur Begründung von *) : Die Konvergenz des ersten Summanden folgt aus dem Zentralen Grenzwertsatz. Die Konvergenz des zweiten Summanden zeigt man wie folgt : Nach der Vorlesung folgt aus der Verteilungskonvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} \le x\right] \;\to\; \Phi(x) \; ,$$

da $\Phi$ überall stetig ist. Damit gilt auch :

$$\begin{aligned}
\Phi(x - \varepsilon) \;&\le\; \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} < x\right] \;\le\; \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} < x\right] \\
&\le\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} \le x\right] \;=\; \Phi(x) \; .
\end{aligned}$$

Also folgt :

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} < x\right] \;\to\; \Phi(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \; .$$

c) Es gilt für alle $c \geq 0$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X_1 > c\right] &= \mathbb{P}\left[-\log U_1 > c\right] = \mathbb{P}\left[\log U_1 < -c\right] \\ &= \mathbb{P}\left[U_1 < e^{-c}\right] = e^{-c} \ .\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\mathbb{P}\left[X_1 > 0\right] = 1$. Also ist $X_1$ exponentialverteilt zum Parameter 1 und es folgt :

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_0^\infty \mathbb{P}\left[X_1 > c\right] dc = \int_0^\infty e^{-c} dc = 1 \ .$$

Alternativ findet man die Verteilungsfunktion $F_{X_1}(c) = (1 - e^{-c})^+$ und damit die Dichtefunktion $f_{X_1}(c) = F'_{X_1}(c) = e^{-c} I_{(0,\infty)}(c)$ und berechnet :

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_0^\infty c f_{X_1}(c) dc = \int_0^\infty c e^{-c} dc = \int_0^\infty e^{-c} dc = 1 \ .$$

Für die Varianz berechnet man :

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \int_0^\infty c^2 e^{-c} dc = 2 \int_0^\infty c e^{-c} dc = 2\mathbb{E}[X_1] = 2 \ ,$$

woraus folgt :

$$Var[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 = 2 - 1 = 1 \ .$$

d) Da $U_i > 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $i$ und da der Logarithmus monoton wachsend ist, gilt :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[(U_1 \cdot U_2 \cdot \dots \cdot U_n)^{n^{-1/2}} e^{n^{1/2}} \in [a,b]\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\left(n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \log(U_i)\right) + n^{1/2} \in [\log(a), \log(b)]\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\tilde{S}_n \in [-\log(b), -\log(a)]\right] \qquad \left(\text{mit } -\log(U_i) = X_i \text{ und } \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\right) = \tilde{S}_n\right) \\ &\overset{*)}{=} \mathbb{P}\left[\log(b^{-1}) < \tilde{S}_n \leq \log(a^{-1})\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\tilde{S}_n \leq \log(a^{-1})\right] - \mathbb{P}\left[\tilde{S}_n \leq \log(b^{-1})\right] \\ &\overset{**)}{\to} \Phi(\log(a^{-1}) - \Phi(\log(b^{-1}) = \int_{\log(b^{-1})}^{\log(a^{-1})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\end{aligned}$$

Die Gleichheit *) gilt, da $\sum_i X_i$ als Summe von unabhängigen exponentialverteilten Zufallsvariablen wieder eine absolutstetige Verteilung hat. Die Konvergenz **) folgt nach dem Zentralen Grenzwertsatz, da die Zufallsvariablen $X_i$ unabhängig und identisch verteilt sind mit $\mathbb{E}[X_i] = Var[X_i] = 1$ .

**3. (Gesetz der großen Zahlen)**

a) Es seien $Y_n, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann konvergiert $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $Y$

- $\mathbb{P}$-*stochastisch*, genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|Y_n - Y| > \varepsilon] = 0$.
- $\mathbb{P}$-*fast-sicher*, genau dann, wenn $\mathbb{P}[Y = \lim_{n\to\infty} Y_n] = 1$

b) In diesem Beweis werden benötigt:
*Bernstein-Ungleichung:* Sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, wobei $X_i$ $(i \in \mathbb{N})$ unabhängig und identisch Bernoulli(p)-verteilt sind. Dann gilt:

$$\mathbb{P}[|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon] \leq 2e^{-2n\varepsilon^2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0.$$

*1. Borel-Cantelli-Lemma:* Es seien $A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ Ereignisse aus $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < \infty \implies \mathbb{P}[A_n \text{tritt unendlich oft ein}] = \mathbb{P}[\bigcap_n \bigcup_{m\geq n} A_m] = 0$$

Setze $A_n := \{|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon\}$. Mithilfe der Bernstein-Ungleichung erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\varepsilon^2} < \infty \text{ für alle } \varepsilon > 0 \text{ (geometrische Reihe)}$$

und somit mittels Borel-Cantelli $\mathbb{P}[\bigcap_n \bigcup_{m\geq n} A_m] = 0$. Weiter gilt

$$\frac{S_n}{n} \to p \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}\ \exists n\ \forall m \geq n :\ |\frac{S_m}{m} - p| < \varepsilon$$
$$\frac{S_n}{n} \nrightarrow p \ \Leftrightarrow\ \exists \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}\ \forall n\ \exists m \geq n :\ |\frac{S_m}{m} - p| \geq \varepsilon,$$

also zusammen

$$\mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \nrightarrow p] = \mathbb{P}[\bigcup_{\varepsilon>0,\ \varepsilon\in\mathbb{Q}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N},\ m\geq n} A_m] \overset{\sigma-\text{additiv}}{\leq} \sum_{\varepsilon>0,\ \varepsilon\in\mathbb{Q}} \mathbb{P}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N},\ m\geq n} A_m] = 0$$

`Alternativ:` Vollständiger Beweis des starken Gesetzes der großen Zahlen.

c) Es seien $Z_n = a + \sum_{i=1}^n Y_i$, $Y_i$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}[Y_i = 1] = \frac{18}{37}$, $\mathbb{P}[Y_i = -1] = \frac{19}{37}$. Dann sind die Zufallsvariablen $X_i := I_{\{Y_i=1\}}$, $i \in \mathbb{N}$ unabhängige und identisch Bernoulli($\frac{18}{37}$)-verteilte Zufallsvariablen. Aus dem Gesetzes der großen Zahlen folgt

$$\frac{S_n}{n} \to \frac{18}{37}\ \mathbb{P} - \text{fast-sicher für } n \to \infty, \text{ wobei } S_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

und weiter, da $Y_i = X_i - (1 - X_i) = 2X_i - 1$

$$\frac{Z_n}{n} = \frac{1}{n}[a - n + 2\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{a}{n} - 1 + 2\frac{S_n}{n} \to -\frac{1}{37}\ \mathbb{P} - \text{fast-sicher für } n \to \infty$$

also $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\exists n\ \forall k \geq n\ \frac{Z_k}{k} \leq 0\}]$=1. Anschaulich bedeutet dies, dass $A = \{Z_n \leq 0 \text{ schließlich}\}$ fast sicher eintritt, der Ruin also nahezu garantiert ist.

**4. (Charakteristische Funktionen)**

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Die *charakteristische Funktion* $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch $t \mapsto \phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$. Da $|e^{itX}| = 1$, ist die Zufallsvariable $e^{itX}$ beschränkt, und somit integrierbar bzgl. $\mathbb{P}$.

b) (i) Für $X \sim \text{Exp}(1)$ ist die Verteilungsdichte $f(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}$, also

$$\phi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx-x} dx = \frac{1}{i+1} e^{it-1}|_{x=0}^\infty = \frac{1}{1-it}, \text{ da } \lim_{x\to\infty} e^{(it-1)x} = 0.$$

(ii) Für $X \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ ist $X$ $\mathbb{P}$-fast sicher 0 oder 1, also

$$\phi_X(t) = e^{it}\mathbb{P}[X = 1] + \mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2}(e^{it} + 1).$$

(iii) Für $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$ ist $X \sim \sum_{i=1}^n X_i$, $X_i$ unabhängig $\sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$, also

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[\prod_{k=1}^n e^{itX_k}] \overset{e^{itX_k}\text{i.i.d.}}{=} \mathbb{E}[e^{itX_1}]^n \overset{(ii)}{=} \frac{1}{2^n}(e^{it} + 1)^n.$$

*(Eine explizite Berechnung dieser charakteristischen Funktion ist möglich, aber aufwändig.)*

c) Für $a, b \in \mathbb{R}$ erhält man

$$\phi_{aX+bY}(t) = \mathbb{E}[e^{it(aX+bY)}] = \mathbb{E}[e^{itaX}e^{itbY}] \overset{X,Y \text{ unabhängig}}{=} \mathbb{E}[e^{itaX}]\mathbb{E}[e^{itbY}] = \phi_X(at)\phi_Y(bt)$$

Seien nun $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $N(0,1)$-verteilt. Man erhält

$$\phi_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i}(t) \overset{\text{obiges + Ind,}}{=} \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \exp(-\frac{t^2}{2n})^n = \exp(-\frac{t^2}{2}) = \phi_{N(0,1)}(t)$$

Nach dem *Fourierinversionssatz* gibt es nur eine Wahrscheinlickeitsverteilung mit charakteristischer Funktion $\phi_{N(0,1)}$, also gilt $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i \sim N(0,1)$.

d) Analog zu c) erhält man $\phi_{\tilde{S}_n}(t) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(\frac{t}{\sqrt{n}})$. Wegen $X_k \in \mathcal{L}^2$ gilt nach einem Satz aus der Vorlesung $\phi_{X_k} \in \mathcal{C}^2$, und somit, da $\mathbb{E}[X_k] = 0$ und $\text{Var}[X_k] = \mathbb{E}[X_k^2] = 1$,

$$\phi_{X_k}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_k}] \overset{\text{Taylorentw.}}{=} 1 + \mathbb{E}[itX_k] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[(itX_k)^2] + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \text{ für } t \to 0$$

und somit

$$\phi_{\tilde{S}_n}(t) = (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))^n \to e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ für } n \to \infty.$$

Hierbei wurde die Ungleichung $|\prod_{i=1}^n z_i - \prod_{i=1}^n w_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i - w_i|$ für $z_i, w_i \in \mathbb{C}$ verwendet.

e) Für $X_i \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ gilt $\mathbb{P}[X_i \in \{0,1\}] = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es existiert also eine abzählbare Menge $R$ mit $\mathbb{P}[\tilde{S}_n \in R \; \forall n \in \mathbb{N}] = 1$, und somit folgt

$$||\mathbb{P} \circ \tilde{S}_n^{-1} - N(0,1)||_{TV} \geq |\mathbb{P}[\tilde{S}_n \in R] - N(0,1)[R]| = 1.$$