Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie – Hinweise zur Klausur

a) Zentrale Sätze

1. Formulieren und beweisen Sie den **zentralen Grenzwertsatz**. Welche der Voraussetzungen sind wesentlich – welche können abgeschwächt werden ? Folgern Sie den Satz von de Moivre/Laplace aus dem ZGS.

2. Formulieren und beweisen Sie das **starke Gesetz der großen Zahlen** (L2 Version). Welche weiteren Aussagen gelten, wenn zusätzlich Unabhängigkeit vorausgesetzt wird ? Wie geht die Unabhängigkeit im Beweis dieser Aussagen ein ?

3. Beweisen Sie eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeiten **grosser Abweichungen** vom Gesetz der grossen Zahlen.

4. Was ist ein **asymptotisches Ereignis** ? Beispiele und Gegenbeispiele ? Formulieren und beweisen Sie das **0-1 Gesetz von Kolmogorov**.

5. Erläutern Sie die Poissonapproximation und die **Normalapproximation** von Binomialverteilungen. In welchem Bereich sind diese Approximationen anwendbar ? Wie erhält man approximative Konfidenzintervalle mithilfe der Normalapproximation ?

6. Formulieren und beweisen Sie das erste und zweite **Borel-Cantelli-Lemma**, und folgern Sie das starke Gesetz der großen Zahlen für unabhängige 0-1-Experimente.

7. Formulieren Sie den **Eindeutigkeitssatz** für W'maße (ohne Beweis). Erläutern Sie Anwendungen, z.B. auf WVn auf R, endliche und unendliche Produktmodelle,....

b) Erwartungswert und Konvergenzbegriffe

8. Welche **Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen** kennen Sie (Definitionen), und in welchem Zusammenhang stehen diese ? Welche **Ungleichungen**/Argumente werden zum Beweis jeweils verwendet ?

9. Was versteht man unter **Konvergenz in Verteilung**, was unter **schwacher Konvergenz** von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ? Beispiele ? Unter welcher Voraussetzung existiert eine schwach konvergente Teilfolge ?

10. Wie ist der **Erwartungswert** einer reellwertigen Zufallsvariable definiert ? (Konstruktionsverfahren). Formulieren und beweisen Sie den Transformationssatz. Wie berechnet man Erwartungswerte für Verteilungen mit Dichten ? Beispiele ?

11. Wie sind **Varianz**, **Kovarianz** und **Korrelation** definiert ? Was besagt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für die Kovarianz bzw. Korrelation ?

12. Definieren Sie, was eine **charakteristische Funktion** ist. Welche Eigenschaften bzw. Rechenregeln gelten ? Definieren Sie, was eine **momentenerzeugende Funktion** ist. Wie und unter welchen Voraussetzungen können aus der momentenerzeugenden bzw. charakteristischen Funktion die **Momente** einer Zufallsvariable berechnet werden ?

13. Nennen Sie (ohne Beweis) den **Satz von der monotonen Konvergenz**, und leiten Sie daraus das Lemma von Fatou und den **Satz von Lebesgue** her. Geben Sie ein Beispiel, wo das Vertauschen von Grenzwert und Erwartungswert nicht zulässig ist.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie – Hinweise zur Klausur

c) Zufallsvariablen und ihre Verteilung

14. Wie ist die **Unabhängigkeit** für allgemeine Zufallsvariablen definiert ? Zeigen Sie, dass Funktionen von unabhängigen Zufallsvariablen wieder unabhängig sind. Wie berechnet man die Verteilung von Summen unabhängiger reelller Zufallsvariablen ?

15. Was versteht man unter der **gemeinsamen Verteilung** von mehreren Zufallsvariablen ? Wie erkennt man Unabhängigkeit an der gemeinsamen Verteilung bzw. an deren Dichte ?

16. Was versteht man unter einer **Zufallsvariable** und unter ihrer **Verteilung** ? Nennen Sie spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Erläutern Sie, wie diese auftreten, und welche Eigenschaften Zufallsvariablen mit diesen Verteilungen haben.

17. Wie sind ein- und mehrdimensionale **Normalverteilungen** definiert ? Warum sind diese Verteilungen für die Wahrscheinlichkeitstheorie fundamental ?

18. Was versteht man unter der **Verteilungsfunktion** einer reellen Zufallsvariable ? Beispiele ? Wie berechnet man den Erwartungswert aus der Verteilungsfunktion ?

19. Was sind **Quantile** ? Wie kann man eine reelle ZV mit vorgegebener Verteilung simulieren ?

20. Was ist eine **(absolut)stetige** Zufallsvariable ? Beispiele ? Wie berechnet man die Dichte aus der Verteilungsfunktion und umgekehrt ?

Allgemeine Hinweise

- Die Klausur findet statt am Dienstag, 23.2., von 9.00-12.00 Uhr im GHS (Anfangsbuchstabe A-M) und KHS (N-Z).
- Hilfsmittel und Unterlagen sind nicht zugelassen.
- Voraussichtlich gibt es 4 Aufgaben, von denen Sie 3 zur Bearbeitung auswählen können.
- Jede der Aufgaben enthält typischerweise:
    - Fragen zu Definitionen, Sätzen und Beweisen aus der Vorlesung. Zur Orientierung finden Sie auf diesem Blatt eine Liste von typischen Fragen (ohne Anspruch auf Vollständigkeit).
    - Aufgabenteile zum Verständnis und der Anwendung des Vorlesungsinhalts. Hier bieten die Übungsaufgaben und Beispiele aus der Vorlesung eine gute Orientierung.
    - Aufgabenteile mit konkreten Berechnungen. Zum Üben erhalten Sie auf Blatt 15 nochmal eine Reihe von typischen Rechenaufgaben aus der Wahrscheinlichkeitstheorie.
- Die drei genannten Teile sind nicht unbedingt in jeder Aufgabe gleich stark berücksichtigt. Sie sollten sich daher die Klausuraufgaben zunächst alle sehr genau durchlesen, und in Ruhe überlegen, welche Sie bearbeiten. Es sollte genug Zeit dafür zur Verfügung stehen.
- Die Wiederholungsprüfung wird, falls nötig, mündlich abgehalten – Termine voraussichtlich 22.-26.3. nach Vereinbarung.