Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 2009/10
Andreas Eberle, Matthias Erbar, Bernhard Hader

Klausur zu „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben, von denen Sie 3 bearbeiten sollten. Bitte streichen Sie die nicht bearbeitete Aufgabe, da nur 3 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Pro Aufgabe können maximal 20 Punkte erreicht werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang ca. 15 Minuten Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 12.00 Uhr. Keine Abgabe zwischen 11.20 und 11.50 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4			**Summe**	**Note**
Punkte								

1. (Reelle Zufallsvariablen)

a) Wie ist die Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\mathbb{R}$ definiert ? *[1 Pkt]*

b) Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen zu den folgenden Verteilungen: *[5 Pkt]*

$$\text{(i) Exp}(1) \qquad \text{(ii) } \frac{1}{3}\,\delta_0 + \frac{2}{3}\,\delta_1 \qquad \text{(iii) } \mathcal{U}_{(1,4)}$$

c) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F stets monoton wachsend und rechtsstetig ist mit $\lim_{c\to-\infty} F(c) = 0$ und $\lim_{c\to\infty} F(c) = 1$. *[6 Pkt]*

d) Wann heisst eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$ *absolutstetig* ? Geben Sie ein Beispiel einer Verteilung, die weder diskret noch absolutstetig ist (ohne Beweis). *[2 Pkt]*

e) Sei $\alpha \geq 1$, und sei X eine nicht-negative absolutstetige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Dichte

$$f_X(t) \;=\; c \cdot t^{\alpha-1} \exp(-t^{\alpha})\,, \qquad t \geq 0,$$

wobei c eine Konstante ist.

(i) Bestimmen Sie den Wert von c. *[2 Pkt.]*

(ii) Zeigen Sie: *[4 Pkt.]*

$$P\left[X \geq s+t \,|\, X \geq t\right] \;\leq\; P\left[X \geq s\right] \qquad \text{für alle } s,t \geq 0.$$

Welche stärkere Aussage gilt im Fall $\alpha = 1$?

2. (Zentraler Grenzwertsatz)

a) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz für Summen von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert m und Varianz σ^2 (ohne Beweis). *[3 Pkt]*

b) Folgern Sie für $x \geq 0$: *[8 Pkt]*

$$\sum_{k:\left|k-\frac{n}{2}\right|\leq\frac{1}{2}x\sqrt{n}} \binom{n}{k} \sim 2^n \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du \qquad \text{für } n \to \infty.$$

c) Seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige, auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $X_1 := -\log U_1$ (mit Beweis) ? Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1. *[4 Pkt]*

d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit *[5 Pkt]*

$$P\left[(U_1 \cdot U_2 \cdot \cdots \cdot U_n)^{n^{-1/2}}\, e^{n^{1/2}} \in [a,b]\right]$$

für $n \to \infty$ konvergiert, und geben Sie einen Ausdruck für den Grenzwert an.

3. (Gesetz der großen Zahlen)

a) Was versteht man unter *P-stochastischer* und *P-fast-sicherer* Konvergenz einer Folge (Y_n) von reellwertigen Zufallsvariablen (Definition) ? Geben Sie ein Beipiel einer Folge, die stochastisch, aber nicht fast sicher konvergiert. [*4 Pkt*]

b) Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1 - p$, $p \in [0, 1]$. Beweisen Sie den folgenden Spezialfall des Gesetzes der großen Zahlen: [*9 Pkt*]

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow p \qquad P\text{-fast sicher.}$$

Geben Sie alle im Beweis verwendeten Aussagen vollständig inklusive aller Voraussetzungen an.

c) Bei einem Roulettespiel gewinnt ein Spieler in jeder Runde mit Wahrscheinlichkeit 18/37 einen Euro, und verliert mit Wahrscheinlichkeit 19/37 einen Euro. Sei Z_n das Kapital des Spielers nach n Runden bei Anfangskapital a. Interpretieren Sie das Ereignis [*7 Pkt*]

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{Z_k \leq 0\}$$

anschaulich, und zeigen Sie $P[A] = 1$.

4. (Charakteristische Funktionen)

a) Definieren Sie die charakteristische Funktion einer reellwertigen Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Warum existiert der Erwartungswert, der in der Definition auftritt ? *[2 Pkt]*

b) Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen von Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen: *[6 Pkt]*

(i) Exp(1) (ii) Bernoulli(1/2) (iii) Bin(n,1/2).

c) Zeigen Sie, dass für die charakteristische Funktion einer Linearkombination $aX + bY$ $(a, b \in \mathbb{R})$ von unabhängigen Zufallsvariablen X und Y gilt: *[5 Pkt]*

$$\phi_{aX+bY}(t) \;=\; \phi_X(at) \cdot \phi_Y(bt)\,.$$

Folgern Sie: Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig und standardnormalverteilt, dann ist auch die Zufallsvariable

$$\tilde{S}_n \;=\; \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

standardnormalverteilt. Nennen Sie alle Aussagen und Voraussetzungen, die Sie zum Beweis verwenden.

d) Sei nun (X_n) eine Folge von beliebigen unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ und $\mathrm{Var}[X_n] = 1$. Beweisen Sie, dass $(\tilde{S}_n)$ in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable konvergiert. Geben Sie wieder alle Aussagen, die Sie verwenden, vollständig an. *[5 Pkt]*

e) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Verteilungen von $\tilde{S}_n$ im Allgemeinen nicht in Variationsdistanz konvergieren. *[2 Pkt]*

Hinweis: Die charakteristische Funktion von N(0,1) ist $\exp(-t^2/2)$.