

Vorstellung des Lehrangebots - Bereich F: Stochastik

Andreas Eberle
Institut für angewandte Mathematik

Juli 2013

Stochastikvorlesungen im Bachelor

- ▶ Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (WiSem)

Stochastikvorlesungen im Bachelor

- ▶ Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (WiSem)
- ▶ Stochastische Prozesse (SoSem)

Stochastikvorlesungen im Bachelor

- ▶ Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (WiSem)
- ▶ Stochastische Prozesse (SoSem)
- ▶ Grundzüge der stochastischen Analysis (WiSem)

Stochastikvorlesungen im Bachelor

- ▶ Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (WiSem)
- ▶ Stochastische Prozesse (SoSem)
- ▶ Grundzüge der stochastischen Analysis (WiSem)
- ▶ Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (WiSem)

Stochastikvorlesungen im Bachelor

- ▶ Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (WiSem)
- ▶ Stochastische Prozesse (SoSem)
- ▶ Grundzüge der stochastischen Analysis (WiSem)

- ▶ Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (WiSem)
- ▶ Einführung in die Statistik (SoSem)

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

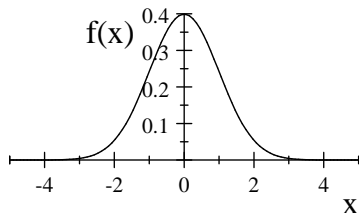
$X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängige Zufallvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) .

- ▶ diskret: z.B. $X_i = \pm 1$ mit W'keit $1/2$

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

$X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) .

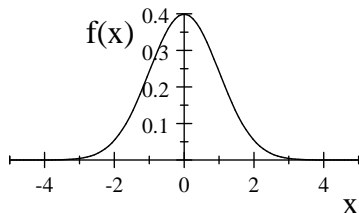
- ▶ diskret: z.B. $X_i = \pm 1$ mit W'keit $1/2$
- ▶ stetig: z.B. $P[a \leq X_i \leq b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$



Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

$X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) .

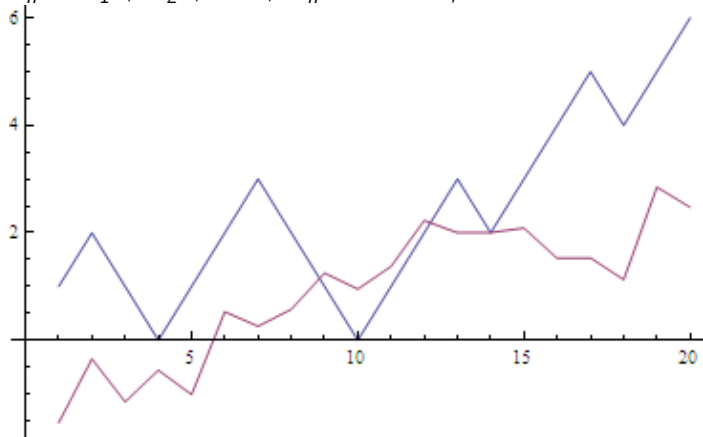
- ▶ diskret: z.B. $X_i = \pm 1$ mit W'keit $1/2$
- ▶ stetig: z.B. $P[a \leq X_i \leq b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$



- ▶ weder noch (z.B. diskreter und stetiger Anteil)

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ Summe, Random Walk.



Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow m$$

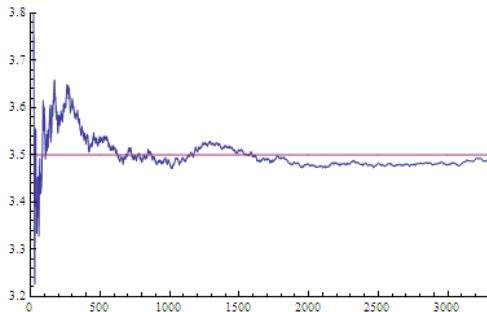


► *schwach*: $P\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right] \rightarrow 0$

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow m$$



▶ *schwach*: $P\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right] \rightarrow 0$

▶ *stark*: $P\left[\underbrace{\frac{S_n}{n} \rightarrow m}_{\text{asymptotisches Ereignis}}\right] = 1$

asymptotisches Ereignis, hängt von ∞ vielen ZV ab

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Zentraler Grenzwertsatz

Verteilung von $\sqrt{n} \cdot \left(\frac{S_n}{n} - m \right) \rightarrow N(0, \sigma^2)$ (Normalverteilung)

► **universell:**

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Zentraler Grenzwertsatz

Verteilung von $\sqrt{n} \cdot \left(\frac{S_n}{n} - m \right) \rightarrow N(0, \sigma^2)$ (Normalverteilung)

► **universell:**

- Grenzwert ist unabhängig von der Verteilung der X_i !!!!

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Große Abweichungen

$$P \left[\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right] \sim e^{-n \cdot I(\varepsilon)}$$

- ▶ Exponentieller Abfall der W'keiten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Große Abweichungen

$$P \left[\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right] \sim e^{-n \cdot I(\varepsilon)}$$

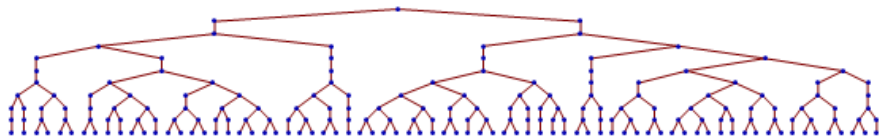
- ▶ Exponentieller Abfall der W'keiten
- ▶ Ratenfunktion $I(\varepsilon) \longleftrightarrow$ *Relative Entropie*

Stochastische Prozesse

Markovketten

Verallgemeinerung:

- ▶ Bisher: $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ Summe von unabhängigen ZV

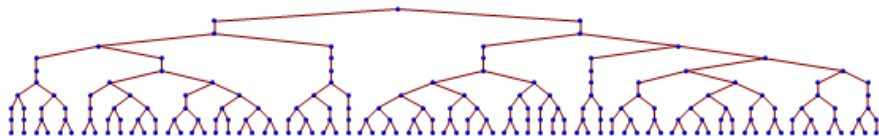


Stochastische Prozesse

Markovketten

Verallgemeinerung:

- ▶ Bisher: $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ Summe von unabhängigen ZV
- ▶ Jetzt: $S_n \rightsquigarrow$ **Markovkette**

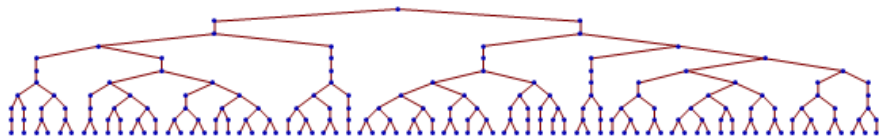


Stochastische Prozesse

Markovketten

Verallgemeinerung:

- ▶ Bisher: $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ Summe von unabhängigen ZV
- ▶ Jetzt: $S_n \rightsquigarrow$ **Markovkette**



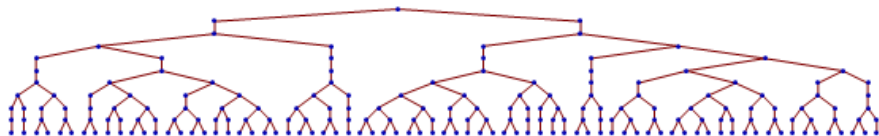
- ▶ Asymptotik ? Konvergenz ins Gleichgewicht ?

Stochastische Prozesse

Markovketten

Verallgemeinerung:

- ▶ Bisher: $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ Summe von unabhängigen ZV
- ▶ Jetzt: $S_n \rightsquigarrow$ **Markovkette**



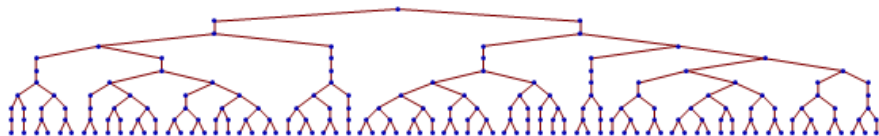
- ▶ Asymptotik ? Konvergenz ins Gleichgewicht ?
- ▶ Gesetz der großen Zahlen (Ergodensatz)

Stochastische Prozesse

Markovketten

Verallgemeinerung:

- ▶ Bisher: $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ Summe von unabhängigen ZV
- ▶ Jetzt: $S_n \rightsquigarrow$ **Markovkette**

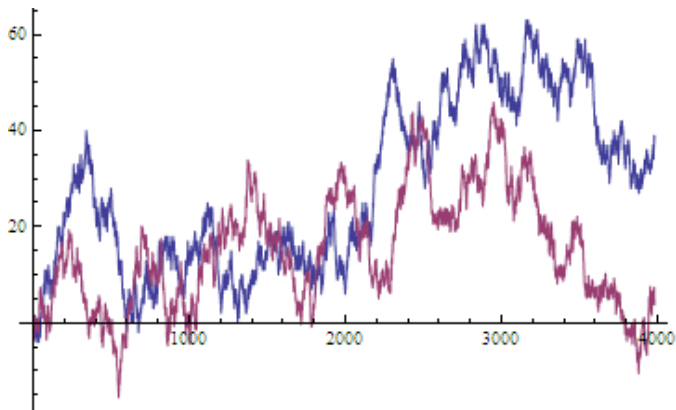


- ▶ Asymptotik ? Konvergenz ins Gleichgewicht ?
- ▶ Gesetz der großen Zahlen (Ergodensatz)
- ▶ **Zentraler Grenzwertsatz**

Stochastische Prozesse

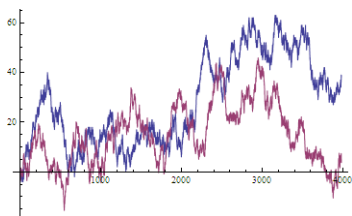
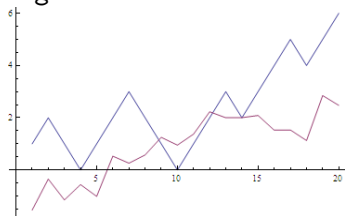
Brownsche Bewegung

Trajektorie eines Random Walk S_n bei großer Schrittzahl:



Stochastische Prozesse

Rigoros: Reskaliere Zeit und Raum

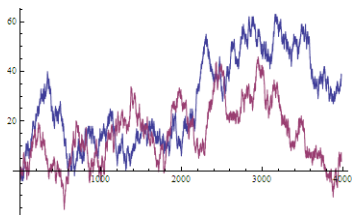
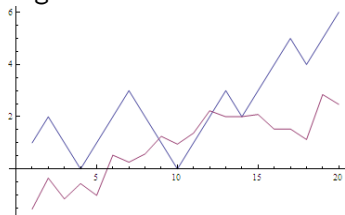


$$S_t^{(h)} = \sqrt{h} \cdot S_{t/h}$$

► $h \rightarrow 0$: $S_t^{(h)} \rightarrow B_t$ für alle $t \geq 0$

Stochastische Prozesse

Rigoros: Reskaliere Zeit und Raum

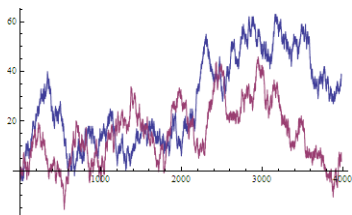
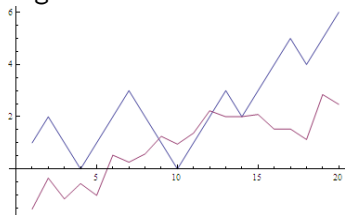


$$S_t^{(h)} = \sqrt{h} \cdot S_{t/h}$$

- ▶ $h \rightarrow 0$: $S_t^{(h)} \rightarrow B_t$ für alle $t \geq 0$
- ▶ B_t **Brownsche Bewegung**

Stochastische Prozesse

Rigoros: Reskaliere Zeit und Raum

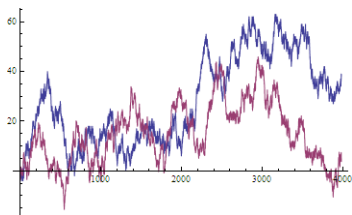
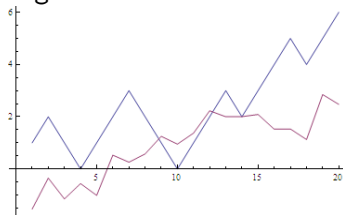


$$S_t^{(h)} = \sqrt{h} \cdot S_{t/h}$$

- ▶ $h \rightarrow 0$: $S_t^{(h)} \rightarrow B_t$ für alle $t \geq 0$
- ▶ B_t **Brownsche Bewegung**
 - ▶ Einstein (1905)

Stochastische Prozesse

Rigoros: Reskaliere Zeit und Raum

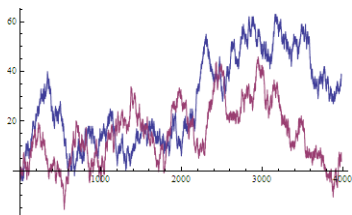
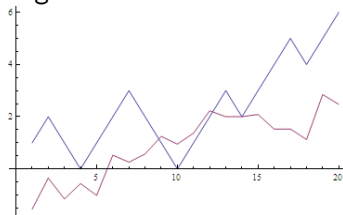


$$S_t^{(h)} = \sqrt{h} \cdot S_{t/h}$$

- ▶ $h \rightarrow 0$: $S_t^{(h)} \rightarrow B_t$ für alle $t \geq 0$
- ▶ B_t **Brownsche Bewegung**
 - ▶ Einstein (1905)
 - ▶ Bachelier (1900)

Stochastische Prozesse

Rigoros: Reskaliere Zeit und Raum

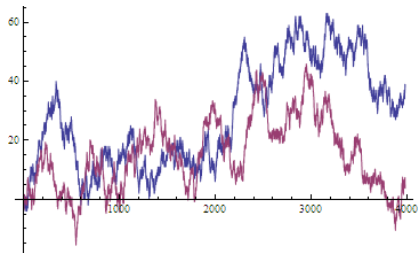


$$S_t^{(h)} = \sqrt{h} \cdot S_{t/h}$$

- ▶ $h \rightarrow 0$: $S_t^{(h)} \rightarrow B_t$ für alle $t \geq 0$
- ▶ B_t **Brownsche Bewegung**
 - ▶ Einstein (1905)
 - ▶ Bachelier (1900)
 - ▶ Wiener (1920)

Stochastische Prozesse

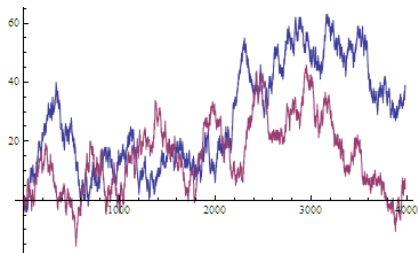
Brownsche Bewegung



- ▶ Fundamentaler stochastischer Prozess in stetiger Zeit
(*Diffusionsprozess*)

Stochastische Prozesse

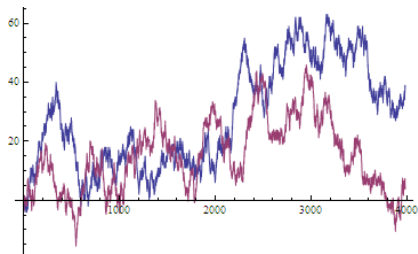
Brownsche Bewegung



- ▶ Fundamentaler stochastischer Prozess in stetiger Zeit (*Diffusionsprozess*)
- ▶ Enge Verbindung zum Laplaceoperator:

Stochastische Prozesse

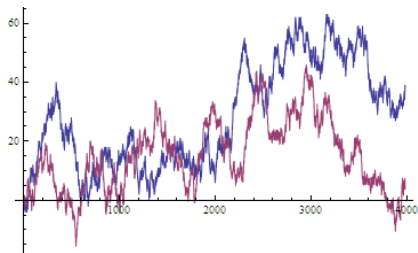
Brownsche Bewegung



- ▶ Fundamentaler stochastischer Prozess in stetiger Zeit
(*Diffusionsprozess*)
- ▶ Enge Verbindung zum Laplaceoperator:
 - ▶ d-dimensionaler Random Walk $\longleftrightarrow \Delta_{\mathbb{Z}^d}$

Stochastische Prozesse

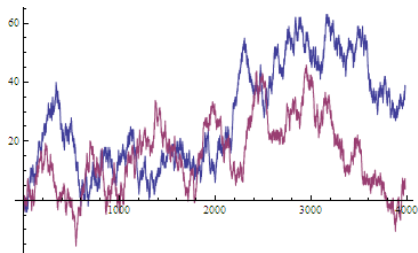
Brownsche Bewegung



- ▶ Fundamentaler stochastischer Prozess in stetiger Zeit (*Diffusionsprozess*)
- ▶ Enge Verbindung zum Laplaceoperator:
 - ▶ d-dimensionaler Random Walk $\longleftrightarrow \Delta_{\mathbb{Z}^d}$
 - ▶ d-dimensionale Brownsche Bewegung $\longleftrightarrow \Delta_{\mathbb{R}^d}$

Stochastische Prozesse

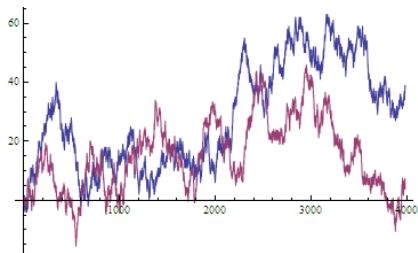
Brownsche Bewegung



- ▶ Fundamentaler stochastischer Prozess in stetiger Zeit (*Diffusionsprozess*)
- ▶ Enge Verbindung zum Laplaceoperator:
 - ▶ d-dimensionaler Random Walk $\longleftrightarrow \Delta_{\mathbb{Z}^d}$
 - ▶ d-dimensionale Brownsche Bewegung $\longleftrightarrow \Delta_{\mathbb{R}^d}$
- ▶ Pfade sind stetig, aber nirgendwo differenzierbar

Stochastische Prozesse

Brownsche Bewegung



- ▶ Fundamentaler stochastischer Prozess in stetiger Zeit (*Diffusionsprozess*)
- ▶ Enge Verbindung zum Laplaceoperator:
 - ▶ d-dimensionaler Random Walk $\longleftrightarrow \Delta_{\mathbb{Z}^d}$
 - ▶ d-dimensionale Brownsche Bewegung $\longleftrightarrow \Delta_{\mathbb{R}^d}$
- ▶ Pfade sind stetig, aber nirgendwo differenzierbar
- ▶ Für festes t ist B_t eine normalverteilte Zufallsvariable

Stochastische Analysis

Konstruktion von anderen stochastischen Prozessen X_t über stochastische Differentialgleichungen:

$$\underbrace{dX_t = b(X_t) dt}_{\text{Gewöhnliche DGI}} + \underbrace{\sigma(X_t) dB_t}_{\text{Zufällige Störung}}$$

- ▶ Basis für zentrale mathematische Modelle in ...

Stochastische Analysis

Konstruktion von anderen stochastischen Prozessen X_t über stochastische Differentialgleichungen:

$$\underbrace{dX_t = b(X_t) dt}_{\text{Gewöhnliche DGI}} + \underbrace{\sigma(X_t) dB_t}_{\text{Zufällige Störung}}$$

- ▶ Basis für zentrale mathematische Modelle in ...
 - ▶ Finanzmathematik (Black-Scholes,)

Stochastische Analysis

Konstruktion von anderen stochastischen Prozessen X_t über stochastische Differentialgleichungen:

$$\underbrace{dX_t = b(X_t) dt}_{\text{Gewöhnliche DGI}} + \underbrace{\sigma(X_t) dB_t}_{\text{Zufällige Störung}}$$

- ▶ Basis für zentrale mathematische Modelle in ...
 - ▶ Finanzmathematik (Black-Scholes, ...)
 - ▶ **Mathematische Physik**

Stochastische Analysis

Konstruktion von anderen stochastischen Prozessen X_t über stochastische Differentialgleichungen:

$$dX_t = \underbrace{b(X_t) dt}_{\text{Gewöhnliche DGI}} + \underbrace{\sigma(X_t) dB_t}_{\text{Zufällige Störung}}$$

- ▶ Basis für zentrale mathematische Modelle in ...
 - ▶ Finanzmathematik (Black-Scholes,)
 - ▶ Mathematische Physik
 - ▶ **Biologie, Chemie**

Stochastische Analysis

Konstruktion von anderen stochastischen Prozessen X_t über stochastische Differentialgleichungen:

$$dX_t = \underbrace{b(X_t) dt}_{\text{Gewöhnliche DGI}} + \underbrace{\sigma(X_t) dB_t}_{\text{Zufällige Störung}}$$

- ▶ Basis für zentrale mathematische Modelle in ...
 - ▶ Finanzmathematik (Black-Scholes,)
 - ▶ Mathematische Physik
 - ▶ Biologie, Chemie
- ▶ ... aber auch für tiefe theoretische Resultate:

Stochastische Analysis

Konstruktion von anderen stochastischen Prozessen X_t über stochastische Differentialgleichungen:

$$dX_t = \underbrace{b(X_t) dt}_{\text{Gewöhnliche DGI}} + \underbrace{\sigma(X_t) dB_t}_{\text{Zufällige Störung}}$$

- ▶ Basis für zentrale mathematische Modelle in ...
 - ▶ Finanzmathematik (Black-Scholes,)
 - ▶ Mathematische Physik
 - ▶ Biologie, Chemie
- ▶ ... aber auch für tiefe theoretische Resultate:
 - ▶ Satz von Hörmander (Malliavin 1978)

Stochastische Analysis

Konstruktion von anderen stochastischen Prozessen X_t über stochastische Differentialgleichungen:

$$dX_t = \underbrace{b(X_t) dt}_{\text{Gewöhnliche DGI}} + \underbrace{\sigma(X_t) dB_t}_{\text{Zufällige Störung}}$$

- ▶ Basis für zentrale mathematische Modelle in ...
 - ▶ Finanzmathematik (Black-Scholes,)
 - ▶ Mathematische Physik
 - ▶ Biologie, Chemie
- ▶ ... aber auch für tiefe theoretische Resultate:
 - ▶ Satz von Hörmander (Malliavin 1978)
 - ▶ **stoch. Beweis des Atiyah-Singer-Indextheorems (Bismut 1984)**

Stochastische Analysis

Konstruktion von anderen stochastischen Prozessen X_t über stochastische Differentialgleichungen:

$$dX_t = \underbrace{b(X_t) dt}_{\text{Gewöhnliche DGI}} + \underbrace{\sigma(X_t) dB_t}_{\text{Zufällige Störung}}$$

- ▶ Basis für zentrale mathematische Modelle in ...
 - ▶ Finanzmathematik (Black-Scholes,)
 - ▶ Mathematische Physik
 - ▶ Biologie, Chemie
- ▶ ... aber auch für tiefe theoretische Resultate:
 - ▶ Satz von Hörmander (Malliavin 1978)
 - ▶ stoch. Beweis des Atiyah-Singer-Indextheorems (Bismut 1984)
 - ▶ **stoch. Löwner-Evolution (Werner, Fields-Medaille 2008)**

Einführung in die Statistik

Stochastik = W'theorie \cup Statistik

- ▶ **W'theorie:** Mathematische Analyse von stochastischen Modellen

Einführung in die Statistik

Stochastik = W'theorie \cup Statistik

- ▶ **W'theorie:** Mathematische Analyse von stochastischen Modellen
- ▶ **Statistik:** Rückschluss von Beobachtungsdaten auf das zugrundeliegende Modell

Einführung in die Statistik

Stochastik = W'theorie \cup Statistik

- ▶ **W'theorie:** Mathematische Analyse von stochastischen Modellen
- ▶ **Statistik:** Rückschluss von Beobachtungsdaten auf das zugrundeliegende Modell
- ▶ *Beispiel:*

Einführung in die Statistik

Stochastik = W'theorie \cup Statistik

- ▶ **W'theorie:** Mathematische Analyse von stochastischen Modellen
- ▶ **Statistik:** Rückschluss von Beobachtungsdaten auf das zugrundeliegende Modell
- ▶ *Beispiel:*
 - ▶ $X =$ Anzahl der Ja-Stimmen bei einer Meinungsumfrage

Einführung in die Statistik

Stochastik = W'theorie \cup Statistik

- ▶ **W'theorie:** Mathematische Analyse von stochastischen Modellen
- ▶ **Statistik:** Rückschluss von Beobachtungsdaten auf das zugrundeliegende Modell
- ▶ *Beispiel:*
 - ▶ X = Anzahl der Ja-Stimmen bei einer Meinungsumfrage
 - ▶ **Modell:** X ist binomialverteilt mit Parametern n und p

Einführung in die Statistik

Stochastik = W'theorie \cup Statistik

- ▶ **W'theorie:** Mathematische Analyse von stochastischen Modellen
- ▶ **Statistik:** Rückschluss von Beobachtungsdaten auf das zugrundeliegende Modell
- ▶ *Beispiel:*
 - ▶ X = Anzahl der Ja-Stimmen bei einer Meinungsumfrage
 - ▶ Modell: X ist binomialverteilt mit Parametern n und p
 - ▶ p ist unbekannt
 - ▶ \rightsquigarrow wir wissen nicht, welches Modell das richtige ist

Einführung in die Statistik

Stochastik = W'theorie \cup Statistik

- ▶ **W'theorie:** Mathematische Analyse von stochastischen Modellen
- ▶ **Statistik:** Rückschluss von Beobachtungsdaten auf das zugrundeliegende Modell
- ▶ *Beispiel:*
 - ▶ X = Anzahl der Ja-Stimmen bei einer Meinungsumfrage
 - ▶ Modell: X ist binomialverteilt mit Parametern n und p
 - ▶ p ist unbekannt
 - \rightsquigarrow wir wissen nicht, welches Modell das richtige ist
 - ▶ Können wir den korrekten Wert für p aus den Beobachtungsdaten schätzen ?

Einführung in die Statistik

Stochastik = W'theorie \cup Statistik

- ▶ **W'theorie:** Mathematische Analyse von stochastischen Modellen
- ▶ **Statistik:** Rückschluss von Beobachtungsdaten auf das zugrundeliegende Modell
- ▶ *Beispiel:*
 - ▶ X = Anzahl der Ja-Stimmen bei einer Meinungsumfrage
 - ▶ Modell: X ist binomialverteilt mit Parametern n und p
 - ▶ p ist unbekannt
 \rightsquigarrow wir wissen nicht, welches Modell das richtige ist
 - ▶ Können wir den korrekten Wert für p aus den Beobachtungsdaten schätzen ?
 - ▶ Fehlerabschätzung ?

Einführung in die Statistik

Stochastik = W'theorie \cup Statistik

- ▶ **W'theorie:** Mathematische Analyse von stochastischen Modellen
- ▶ **Statistik:** Rückschluss von Beobachtungsdaten auf das zugrundeliegende Modell
- ▶ *Beispiel:*
 - ▶ X = Anzahl der Ja-Stimmen bei einer Meinungsumfrage
 - ▶ Modell: X ist binomialverteilt mit Parametern n und p
 - ▶ p ist unbekannt
 \rightsquigarrow wir wissen nicht, welches Modell das richtige ist
 - ▶ Können wir den korrekten Wert für p aus den Beobachtungsdaten schätzen ?
 - ▶ Fehlerabschätzung ?
 - ▶ **Zentraler Grenzwertsatz:**
Fehler ist asymptotisch normalverteilt

Modulbeschreibungen

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

- ▶ **Voraussetzung:** Grundvorlesungen

Modulbeschreibungen

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

- ▶ **Voraussetzung:** Grundvorlesungen
- ▶ **Inhalt:** Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen, stochastische Standardmodelle. Bedingte W'keiten, Unabhängigkeit, Borel-Cantelli-Lemma. Random walk, Zusammenhang mit Differenzgleichungen. Erwartungswert, Varianz und Kovarianz. Gesetze der großen Zahlen, Konvergenzbegriffe der Stochastik. Momentenerzeugende und charakteristische Funktionen, multivariate Normalverteilungen, zentraler Grenzwertsatz. Ansatz der Statistik: Maximum-Likelihood-Prinzip, grundlegende Schätz- und Testverfahren, Konfidenzintervalle. Entropie und statistische Unterscheidbarkeit, exponentielle Familien.

Modulbeschreibungen

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

- ▶ **Voraussetzung:** Grundvorlesungen
- ▶ **Inhalt:** Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen, stochastische Standardmodelle. Bedingte W'keiten, Unabhängigkeit, Borel-Cantelli-Lemma. Random walk, Zusammenhang mit Differenzgleichungen. Erwartungswert, Varianz und Kovarianz. Gesetze der großen Zahlen, Konvergenzbegriffe der Stochastik. Momentenerzeugende und charakteristische Funktionen, multivariate Normalverteilungen, zentraler Grenzwertsatz. Ansatz der Statistik: Maximum-Likelihood-Prinzip, grundlegende Schätz- und Testverfahren, Konfidenzintervalle. Entropie und statistische Unterscheidbarkeit, exponentielle Familien.
- ▶ **Querverbindungen:** Analysis III (Maßtheorie, Integration)

Modulbeschreibungen

Stochastische Prozesse

- ▶ **Voraussetzung:** Einführung in die Wtheorie

Modulbeschreibungen

Stochastische Prozesse

- ▶ **Voraussetzung:** Einführung in die Wtheorie
- ▶ **Inhalt:** Bedingte Erwartungen, bedingte Dichten, stochastische Kerne. Zeitdiskrete Markovketten: Existenzsatz, Dirichletproblem, Rekurrenz und Transienz, Konvergenz ins Gleichgewicht, Ergodizität. Isingmodell. Reversible Markovketten und Markov Chain Monte Carlo Methoden. Poissonprozeß und zeitstetige Markovketten, Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen. Brownsche Bewegung: Motivation als Skalierungslimes von Irrfahrten (ohne Beweis), Randverteilungen, Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung, Existenzsatz von Kolmogorov (Beweis optional), Wiener-Levy-Konstruktion, Skalierungsinvarianz und Symmetrien, Pfadregularität.

Modulbeschreibungen

Stochastische Prozesse

- ▶ **Voraussetzung:** Einführung in die Wtheorie
- ▶ **Inhalt:** Bedingte Erwartungen, bedingte Dichten, stochastische Kerne. Zeitdiskrete Markovketten: Existenzsatz, Dirichletproblem, Rekurrenz und Transienz, Konvergenz ins Gleichgewicht, Ergodizität. Isingmodell. Reversible Markovketten und Markov Chain Monte Carlo Methoden. Poissonprozeß und zeitstetige Markovketten, Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen. Brownsche Bewegung: Motivation als Skalierungslimes von Irrfahrten (ohne Beweis), Randverteilungen, Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung, Existenzsatz von Kolmogorov (Beweis optional), Wiener-Levy-Konstruktion, Skalierungsinvarianz und Symmetrien, Pfadregularität.
- ▶ **Querverbindungen:** Diskrete Mathematik (Markovketten), Partielle Dgln (Browsche Bewegung), Statistische Physik, Mathematische Biologie

Modulbeschreibungen

Grundzüge der stochastischen Analysis

- ▶ **Voraussetzung:** Einführung in die Wtheorie, Stochastische Prozesse

Modulbeschreibungen

Grundzüge der stochastischen Analysis

- ▶ **Voraussetzung:** Einführung in die Wtheorie, Stochastische Prozesse
- ▶ **Inhalt:** Zeitdiskrete Martingale: Stoppsatz, Ruinproblem, diskrete stochastische Integrale, Konvergenzsätze, Anwendungen auf Markovketten. Zeitstetige Martingale: Regularität, Stoppsatz, Abschätzungen. Itokalkül: Brownsche Bewegung, quadratische Variation, stochastisches Integral bzgl. einer Brownschen Bewegung, Itoformel (ein- und mehrdimensional), Martingale und Levy-Charakterisierung der Brownschen Bewegung, stochastische Darstellungen von Lösungen des Dirichletproblems und der Wärmeleitungsgleichung, Austritts- und Passierzeiten, Integration bzgl. Brownscher Semimartingale, Feynman-Kac-Formel, Girsanovtransformation.

Modulbeschreibungen

Grundzüge der stochastischen Analysis

- ▶ **Voraussetzung:** Einführung in die Wtheorie, Stochastische Prozesse
- ▶ **Inhalt:** Zeitdiskrete Martingale: Stoppsatz, Ruinproblem, diskrete stochastische Integrale, Konvergenzsätze, Anwendungen auf Markovketten. Zeitstetige Martingale: Regularität, Stoppsatz, Abschätzungen. Itokalkül: Brownsche Bewegung, quadratische Variation, stochastisches Integral bzgl. einer Brownschen Bewegung, Itoformel (ein- und mehrdimensional), Martingale und Levy-Charakterisierung der Brownschen Bewegung, stochastische Darstellungen von Lösungen des Dirichletproblems und der Wärmeleitungsgleichung, Austritts- und Passierzeiten, Integration bzgl. Brownscher Semimartingale, Feynman-Kac-Formel, Girsanovtransformation.
- ▶ **Querverbindungen:** Partielle Dgln und Funktionalanalysis, Finanzmarktmodelle (Ökonomie)

Modulbeschreibungen

Einführung in die Statistik

- ▶ **Voraussetzung:** Einführung in die Wtheorie

Modulbeschreibungen

Einführung in die Statistik

- ▶ **Voraussetzung:** Einführung in die Wtheorie
- ▶ **Inhalt: Statistik :** Parametrische, nichtparametrische, und Bayessche Modelle, Modellwahl, Robustheit. Mittlerer quadratischer Fehler von Schätzern, Informationsungleichung, Zusammenhang von Fisher-Information und relativer Entropie. Niveau und Macht von Hypothesentests, Neyman-Pearson-Lemma. Konfidenzintervalle und Tests in Gaußschen Produktmodellen. Konsistenz von Maximum-Likelihood-Schätzern, asymptotische Macht von Likelihoodquotiententests. Asymptotische Normalität von ML-Schätzern (Beweis optional). Konvergenz von empirischen Verteilungen, Normalapproximation von Multinomialverteilungen, Anpassungstests und ihre Asymptotik, Tests auf Unabhängigkeit.
Optional: Finanzmathematik : Bedingte Erwartungen und Martingale, Wertprozesse und Portfolio-Strategien als diskrete stochastische Integrale, Arbitrage, äquivalente Martingalmaße, faire Optionspreise, Cox-Ross-Rubinstein-Modell, Black-Scholes-Formel.

Modulbeschreibungen

Einführung in die Statistik

- ▶ **Voraussetzung:** Einführung in die Wtheorie
- ▶ **Inhalt: Statistik :** Parametrische, nichtparametrische, und Bayessche Modelle, Modellwahl, Robustheit. Mittlerer quadratischer Fehler von Schätzern, Informationsungleichung, Zusammenhang von Fisher-Information und relativer Entropie. Niveau und Macht von Hypothesentests, Neyman-Pearson-Lemma. Konfidenzintervalle und Tests in Gaußschen Produktmodellen. Konsistenz von Maximum-Likelihood-Schätzern, asymptotische Macht von Likelihoodquotiententests. Asymptotische Normalität von ML-Schätzern (Beweis optional). Konvergenz von empirischen Verteilungen, Normalapproximation von Multinomialverteilungen, Anpassungstests und ihre Asymptotik, Tests auf Unabhängigkeit.
Optional: Finanzmathematik : Bedingte Erwartungen und Martingale, Wertprozesse und Portfolio-Strategien als diskrete stochastische Integrale, Arbitrage, äquivalente Martingalmaße, faire Optionspreise, Cox-Ross-Rubinstein-Modell, Black-Scholes-Formel.
- ▶ **Querverbindungen:** Finanzmarktmodelle (Ökonomie)