Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle
Luis La Rocca

Probeklausur zur Stochastik

Wichtige Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur findet im Kleinen Hörsaal (Anfangsbuchstaben A-K) und im Großen Hörsaal (Anfangsbuchstaben L-Z) statt. Es gelten die 3G-Regeln. Während der gesamten Klausur besteht Maskenpflicht. Wir empfehlen das Tragen einer FFP2-Maske sowie einen vorherigen Test.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt voraussichtlich 100 Minuten.
- Hilfsmittel (insbesondere Smartphones, Taschenrechner, eigene Unterlagen) sind nicht erlaubt. Sie benötigen lediglich einen Stift.

Viel Erfolg!

1. (Diskrete Zufallsvariablen)
Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}$ und Massenfunktion

$$p(k) = \begin{cases} ck & \text{für } k \in \{1,2,3,4,5\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie c.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von $Y_1 := \frac{1}{X_1}$ und die Kovarianz von X_1 und Y_1.

d) Sei $Y_i := \frac{1}{X_i}$. Bestimmen Sie die Kovarianz von $\sum_{i=1}^n X_i$ und $\sum_{i=1}^n Y_i$.

2. (Erdbeereis)
Die Kunden der Eisdiele Venezia sind zu 40% Frauen, zu 20% Männer und zu 40% Kinder. Des Weiteren ist Folgendes bekannt:

- Ein Mann bestellt in 80% der Fälle kein Erdbeereis.
- Die Hälfte aller Kunden, die Erdbeereis kaufen, sind Frauen.
- Die Ereignisse "Kunde kauft Erdbeereis" und "Kunde ist ein Kind" sind unabhängig voneinander.

Modellieren Sie einen geeigneten Grundraum und stellen Sie die gegebenen Informationen in der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie dar. Berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde Erdbeereis möchte.

3. (Reelle Zufallsvariablen)

a) Was ist eine reellwertige Zufallsvariable? Welche Eigenschaften hat ihre Verteilungsfunktion?

b) Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen:

(i) $X \sim \mathrm{N}(3,9)$, (ii) $T \sim \mathrm{Exp}(5)$, (iii) $\max(Z,0)$ mit $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

c) Sei T eine zum Parameter $\lambda = 1$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte der Zufallsvariable $X := 1 - \exp(-T)$.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

4. (Normalapproximation)

Jeder Student besteht die Klausur zur Vorlesung "Mathematik I" an der Universität von Wakanda unabhängig von den anderen Studenten mit Wahrscheinlichkeit 0,5. In diesem Jahr nehmen 100 Personen an der Klausur teil.

a) Formulieren Sie den Satz von De Moivre-Laplace.

b) Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 60 Personen die Klausur bestehen.

c) Angenommen, Sie wissen bereits von 36 Personen, dass sie bestanden haben. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 60 Personen insgesamt die Klausur bestehen?

Hinweis: Einige Werte der Standardnormalverteilung finden Sie auf Seite 5.

5. (Hypothesentest)

Ein neuer Impfstoff A gegen eine Krankheit ist entwickelt worden. Er soll wirksamer sein als der bisher verwendete Impfstoff B, bei dem in der Regel etwa 10% der geimpften Personen erkrankten. In einer Zufallsstichprobe von 100 mit A geimpften Personen erkranken nur vier Personen.

a) Geben Sie ein geeignetes statistisches Modell an, und formulieren Sie die Nullhypothese und Alternative.

b) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel zum Signifikanzniveau 5% . Welche Aussage ergibt sich aufgrund der beobachteten Werte?

c) Bei welchem Signifikanzniveau hätten Sie eine andere Entscheidung getroffen? Welche?

Hinweis: Für die Massenfunktion der Binomialverteilung Bin$(100, 0.1)$ *gilt:*

$$p(5) = 0.034,\; p(4) = 0.016,\; p(3) = 0.006,\; p(2) = 0.0016,\; p(1) = 0.0003,\; p(0) = 0.00003.$$

.

6. (Wahr oder falsch)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen in höchstens fünf Sätzen:

a) Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einem Raum Ω mit σ-Algebra $\mathcal{A}$ und ist $\lambda \in [0,1]$, so ist auch $\lambda\mathbb{Q} + (1-\lambda)\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

b) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markovkette auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ mit Werten in $\{a, b\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann existiert $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = a]$.

c) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$, und Z sei eine auf $\{-1, 1\}$ gleichverteilte Zufallsvariable. Dann sind X und $Z \cdot X$ unkorreliert.

Werte zur Standardnormalverteilung

$\Phi(0,0) = 0,500$	$\Phi(1,0) = 0,841$	$\Phi(2,0) = 0,977$
$\Phi(0,1) = 0,539$	$\Phi(1,1) = 0,864$	$\Phi(2,1) = 0,982$
$\Phi(0,2) = 0,579$	$\Phi(1,2) = 0,884$	$\Phi(2,2) = 0,986$
$\Phi(0,3) = 0,617$	$\Phi(1,3) = 0,903$	$\Phi(2,3) = 0,989$
$\Phi(0,4) = 0,655$	$\Phi(1,4) = 0,919$	$\Phi(2,4) = 0,991$
$\Phi(0,5) = 0,691$	$\Phi(1,5) = 0,933$	$\Phi(2,5) = 0,993$
$\Phi(0,6) = 0,725$	$\Phi(1,6) = 0,945$	$\Phi(2,6) = 0,995$
$\Phi(0,7) = 0,758$	$\Phi(1,7) = 0,955$	$\Phi(2,7) = 0,996$
$\Phi(0,8) = 0,788$	$\Phi(1,8) = 0,964$	$\Phi(2,8) = 0,997$
$\Phi(0,9) = 0,815$	$\Phi(1,9) = 0,971$	$\Phi(2,9) = 0,998$

Die Tabelle enthält auf drei Nachkommastellen gerundete Werte von $\Phi(x)$, wobei Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable ist.