1. (Zufallsvariablen und Gesetz der großen Zahlen) *[30 Punkte]*

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine abzählbare Teilmenge der reellen Zahlen.

a) Geben Sie eine kurze, aber vollständige Definition der folgenden Begriffe:

 (i) Wahrscheinlichkeitsraum,

 (ii) Zufallsvariable X mit Werten in S,

 (iii) Erwartungswert von X,

 (iv) Varianz von X.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$.

 (i) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz für eine Zufallsvariable X mit $P[X=1] = p$ und $P[X=0] = 1-p$,

 (ii) Zeigen Sie: Für eine Zufallsvariable $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ gilt

$$E[Y] = np \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[Y] = np(1-p)\,.$$

c) Sei $Z : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Erwartungswert $m \in \mathbb{R}$ und Varianz $v \in (0,\infty)$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$P\left[|Z-m| \geq c\right] \;\leq\; \frac{v}{c^2} \qquad \text{für alle } c \in (0,\infty).$$

d) Seien $X_1, X_2, \dots : \Omega \to S$ unkorrelierte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Erwartungswert $m \in \mathbb{R}$ und Varianz $v \in (0,\infty)$. Formulieren und beweisen Sie in diesem Rahmen eine Version des Gesetzes der großen Zahlen.

Lösung:

a) (i) Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ besteht aus einer nicht-leeren Menge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, und einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dabei hat eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ die folgenden Eigenschaften:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Für alle $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
2. Für alle $A_1, A_2, \ldots$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

(ii) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable mit Werten in der abzählbaren Menge S ist eine Funktion $X : \Omega \to S$ mit der Eigenschaft, dass

$$X^{-1}(s) \;=\; \{X = s\} \;=\; \{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\} \;\in\; \mathcal{A}$$

für alle $s \in S$ gilt.

(iii) Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in S. Dann ist der Erwartungswert von X definiert als

$$\mathbb{E}[X] \;:=\; \sum_{s\in S} s \cdot \mathbb{P}[X = s].$$

Für eine allgemeine Zufallsvariable mit Werten in S gilt dieselbe Definition, sofern die Summe wohldefiniert ist. Dies ist der Fall, wenn mindestens einer der beiden Erwartungswerte $E[X^+]$ oder $E[X^-]$ endlich ist.

(iv) Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in S mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Dann ist die Varianz von X definiert als die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert, d.h.

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right].$$

b) (i) Der Erwartungswert von X ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \mathbb{P}[X = 1] + 0 \cdot \mathbb{P}[X = 0] = p$$

Die Varianz berechnen wir zum Beispiel über die Identität $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$:

$$\mathrm{Var}[X] = 1^2 \cdot p - p^2 = p(1 - p)$$

(ii) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ verteilt wie in (i). Dann hat die Summe $X_1 + \ldots + X_n$ dieselbe Verteilung wie Y. Daher folgt mit der Linearität des Erwarungswertes:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n] = n\mathbb{E}[X_1] = np.$$

Die Unabhängigkeit der X_i impliziert deren Unkorreliertheit, sodass gilt

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[X_1 + \ldots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \ldots + \text{Var}[X_n] = n\text{Var}[X_1] = np(1-p).$$

c) Es gilt $\mathbb{1}_{\{|Z-m|\geq c\}} \leq |Z-m|^2/c^2$. Zusammen mit der Monotonie des Erwartungswertes folgt

$$\mathbb{P}[|Z-m| \geq c] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|Z-m|\geq c}\right] \leq \mathbb{E}[|Z-m|^2]/c^2 = \text{Var}[Z]/c^2 = v/c^2.$$

d) *Schwaches Gesetz der großen Zahlen*: Sei $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Dann konvergiert $S_n/n \to m$ für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right] = 0$$

<u>Beweis:</u> Zunächst berechnen wir mit Hilfe der Linearität des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{n} nm = m.$$

Da die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unkorreliert sind, folgt weiter

$$\text{Var}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \text{Var}[X_k] = \frac{1}{n^2} nv = \frac{v}{n}.$$

Mit Hilfe der Ungleichung aus (c) folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right] = \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\text{Var}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{v}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

■

2. (Verteilungsfunktionen und Dichten) *[30 Punkte]*

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(i) Wie sind die Verteilung und die Verteilungsfunktion von X definiert?

(ii) Wann nennt man die Verteilung absolutstetig? Wie hängen die Verteilungsfunktion und die Dichte in diesem Fall zusammen?

b) Sind die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen absolutstetig? (ohne Beweis). Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen, sowie, im absolutstetigen Fall, die Graphen der Dichten (mit Beschriftung der Koordinatenachsen):

(i) $U \sim \text{Unif}(0, 2)$,

(ii) $Y \sim N(m, v)$ mit m=40, v=400,

(iii) $X \sim \text{Bin}(n, p)$ mit n=3, p=1/2,

(iv) $W = B + U$, wobei B unabhängig von U mit $P[B = 0] = P[B = 1] = 1/2$.

c) Berechnen Sie

(i) den Erwartungswert von U^2,

(ii) den Median von U^2,

(iii) die Wahrscheinlichkeit $P[W > 1]$.

Lösung:

a) (i) Die Verteilung von X ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ definiert durch

$$\mu_X[B] := \mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}] = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(B)$$

für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ ist definiert als

$$F_X(c) := \mu_X[(-\infty, c]] = \mathbb{P}[X \leq c]$$

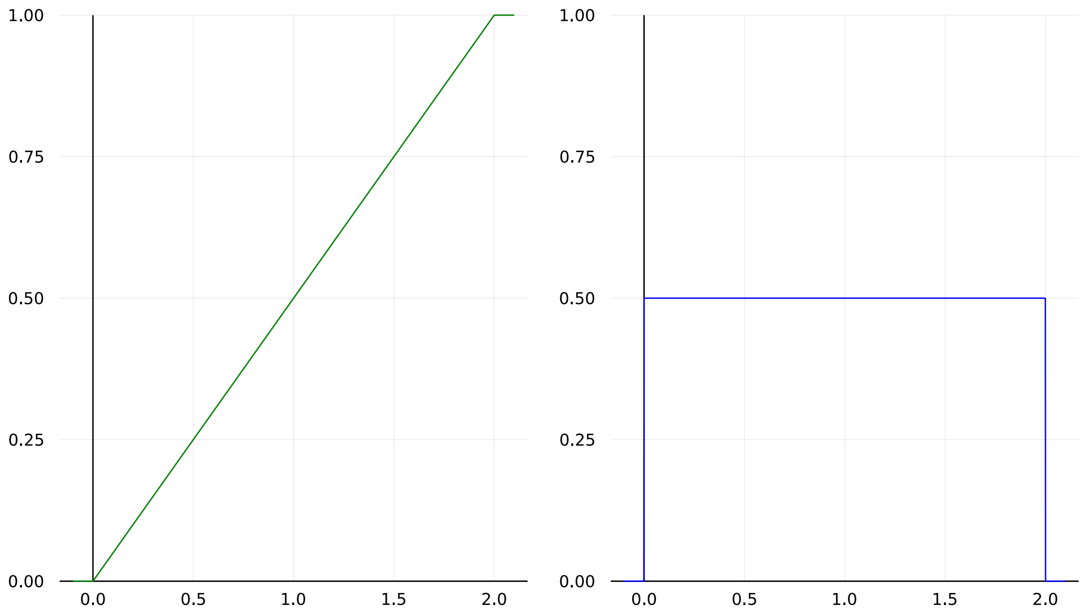
für alle $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Eine Verteilung μ_X heißt absolutstetig, falls eine integrierbare Funktion $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ existiert mit

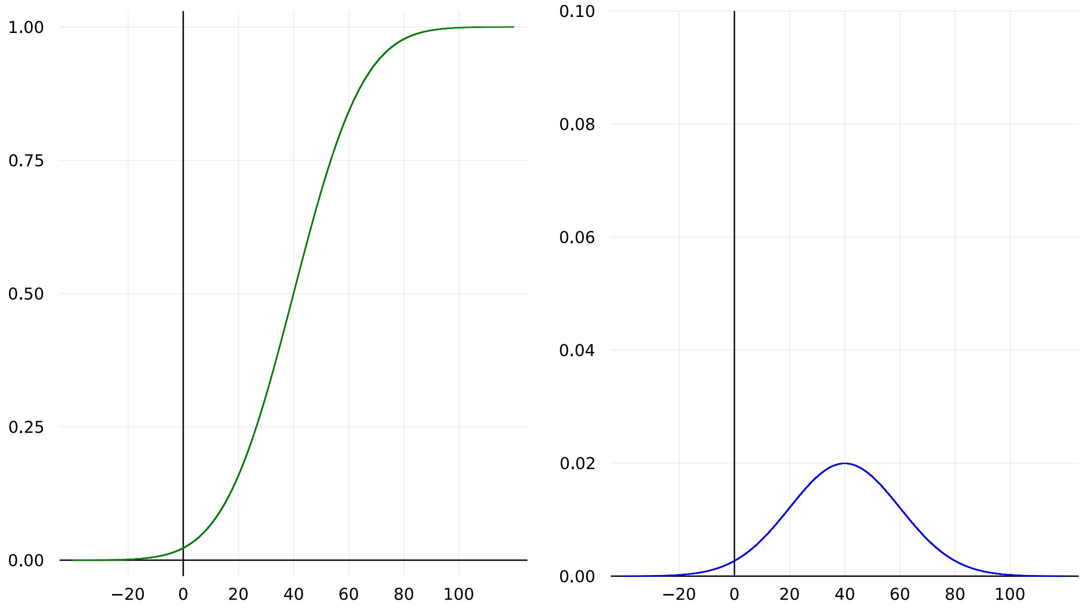
$$F_X(c) = \mu_X[(-\infty, c]] = \int_{-\infty}^{c} f_X(x) \mathrm{d}x$$

für alle $c \in \mathbb{R}$. In diesem Fall heißt f_X die Dichtefunktion der Zufallsvariable X bzw. der Verteilung μ_X.

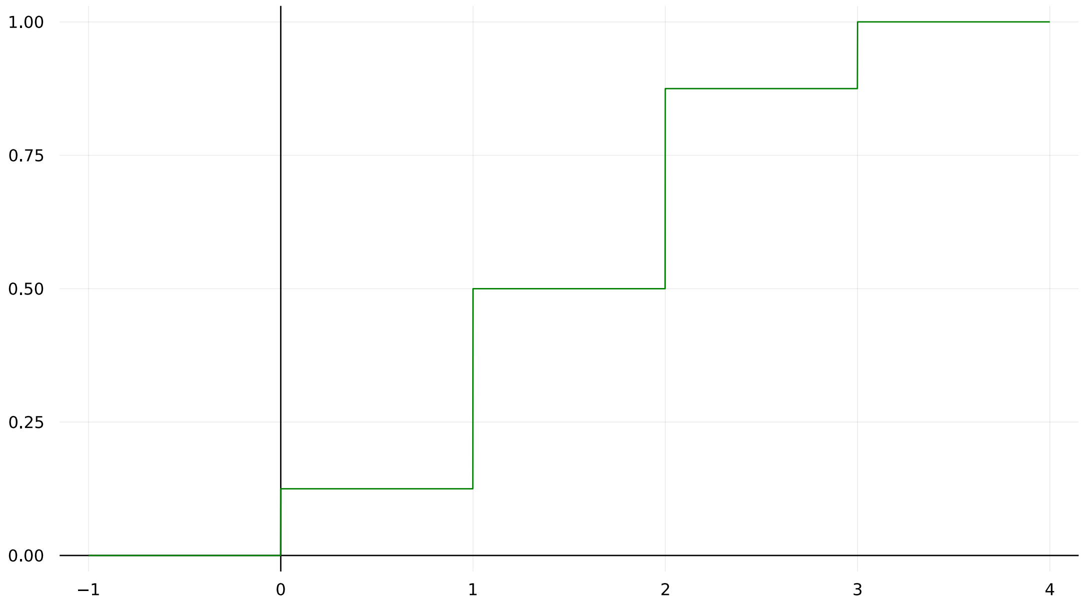
b) (i) Die Verteilung von $U \sim \mathrm{Unif}(0,2)$ ist absolutstetig.



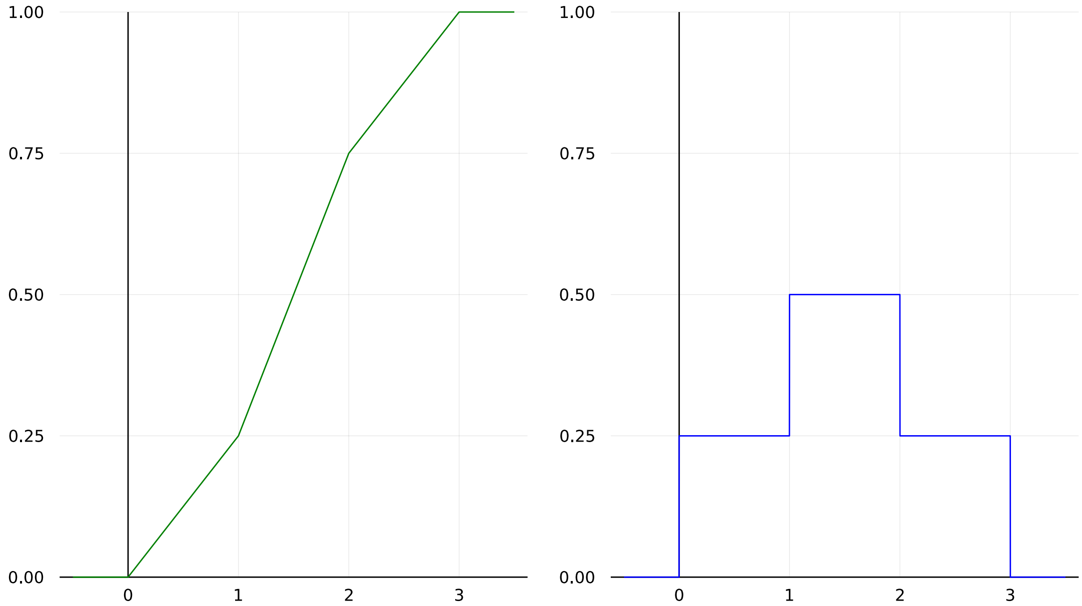
(ii) Die Verteilung von $Y \sim \mathrm{N}(40, 400)$ ist absolutstetig.



(ii) Die Verteilung von $X \sim \mathrm{Bin}(3, 1/2)$ ist nicht absolutstetig.



(iv) Die Verteilung von $W = B + U$ ist absolutstetig.



c) (i) Die Dichte der Gleichverteilung auf $[0, 2]$ ist gegeben durch $f_U(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}(x)$. Damit ist

$$\mathbb{E}[U^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_U(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{4}{3}.$$

(ii) Für $c \in [0, 1]$ ist die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung auf $[0, 2]$ gegeben durch $F(c) = c/2$. Der Median von U^2 ist gleich 1, denn für $m \in [0, 1]$ gilt

$$\mathbb{P}[U^2 \leq m] = \mathbb{P}[U \leq \sqrt{m}] = \frac{\sqrt{m}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 1.$$

(iii) Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[W > 1] &= \mathbb{P}[B + U > 1] \\ &= \mathbb{P}[B + U > 1 | B = 0]\mathbb{P}[B = 0] + \mathbb{P}[B + U > 1 | B = 1]\mathbb{P}[B = 1] \\ &= \mathbb{P}[U > 1]\mathbb{P}[B = 0] + \mathbb{P}[U > 0]\mathbb{P}[B = 1] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}[U > 1] + \frac{1}{2}\mathbb{P}[U > 0] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt die **Unabhängigkeit** von B und U genutzt haben.

3. (Stochastische Modelle) *[30 Punkte]*

a) 90% der in einer Radarstation eintreffenden Signale sind mit einer Störung überlagerte Nutzsignale, und 10% sind reine Störungen. Wird ein gestörtes Nutzsignal empfangen, zeigt die Anlage mit Wahrscheinlichkeit 0,98 die Ankunft eines Nutzsignals an, und ansonsten die Ankunft eines Störsignals. Beim Empfang einer reinen Störung wird mit Wahrscheinlichkeit 0,1 fälschlicherweise die Ankunft eines Nutzsignals angezeigt.

(i) Formulieren Sie ein geeignetes stochastisches Modell.

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein als Störsignal angezeigtes Signal tatsächlich ein (störungsüberlagertes) Nutzsignal?

b) Sei X die Anzahl der Sechsen bei 720 maligen Werfen eines fairen Würfels.

(i) Formulieren Sie ein geeignetes Modell.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P[X \geq 130]$ näherungsweise.

(iii) Wie groß muss man $k \in \mathbb{N}$ mindestens wählen, damit die Wahrscheinlichkeit $P[X \geq k]$ näherungsweise kleiner als 5% ist?

Lösung:

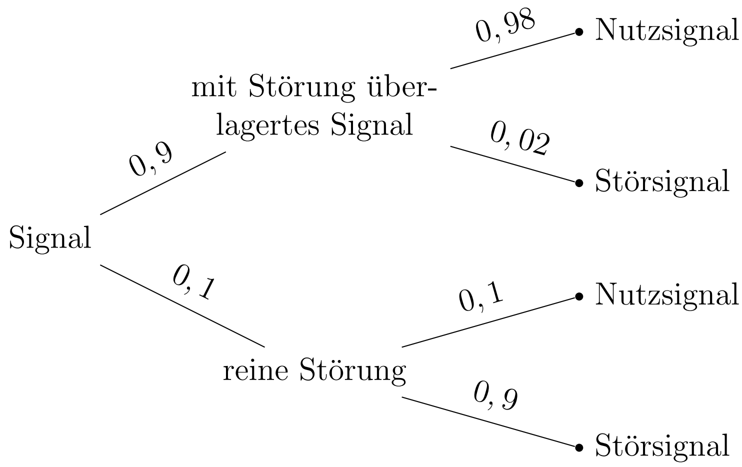
a) (i) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \{0,1\}$ zwei Zufallsvariablen. Dabei entspreche das Ereignis $\{X = 1\}$ dem Eintreffen eines (überlagerten) Nutzsignals und $\{X = 0\}$ dem Eintreffen einer reinen Störung. Weiter sei $\{Y = 1\}$ das Ereignis, dass das eingetroffene Signal als Nutzsignal angezeigt wird und $\{Y = 0\}$, dass es als Störung angezeigt wird. Dann ist die Verteilung von X gegeben durch

$$\mathbb{P}[X = 0] = 0,1 \quad \text{und} \quad P[X = 1] = 0,9.$$

und die bedingte Verteilung von Y gegeben X ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y = 0|X = 0] = 0,9 \quad &\text{und} \quad \mathbb{P}[Y = 0|X = 1] = 0,1\ , \\ \mathbb{P}[Y = 1|X = 0] = 0,02 \quad &\text{und} \quad \mathbb{P}[Y = 1|X = 1] = 0,98\,. \end{aligned}$$

Das folgende Pfaddiagramm veranschaulicht das beschriebene mehrstufige Modell:



(ii) Das Ereignis, dass ein als Störsignal angezeigtes Signal tatsächlich ein (störungsüberlagertes) Nutzsignal ist, ist gegeben durch $X = 1$ bedingt auf $Y = 0$. Also ist mit der Bayesschen Regel

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = 1|Y = 0] &= \frac{P[Y = 0|X = 1]\mathbb{P}[X = 1]}{P[Y = 0|X = 1]\mathbb{P}[X = 1] + P[Y = 0|X = 0]\mathbb{P}[X = 0]} \\ &= \frac{0,02 \cdot 0,9}{0,02 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,1} = \frac{0,02}{0,12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

b) (i) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \{0, 1, \ldots, 720\}$ eine Zufallsvariable, die die Anzahl der Sechsen beim 720-maligem Werfen wiedergibt. Dann ist $X \sim \mathrm{Bin}(720, 1/6)$.

(ii) Wir wissen (zum Beispiel aus Aufgabe 1b) Teil (ii)), dass

$$\mathbb{E}[X] = \frac{720}{6} = 120 \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[X] = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 100.$$

Dann gilt näherungsweise mit Hilfe des Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \geq 130] &= \mathbb{P}\left[\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\operatorname{Var}[X]}} \geq \frac{130 - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\operatorname{Var}[X]}}\right] \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{130 - 120}{10}\right) \\ &= 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0,841 = 0,159.\end{aligned}$$

(iii) Mit derselben Approximation wie in Teil (ii) erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \geq k] \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - 120}{10}\right) \leq 0,05 \;\Leftrightarrow\; \Phi\left(\frac{k - 120}{10}\right) \geq 0,95 \\ \Leftrightarrow\; \frac{k - 120}{10} \geq 1,7 \;\Leftrightarrow\; k \geq 137.\end{aligned}$$

4. (Das Tintenfischorakel) [*15 Punkte*]

Während der Fußball Europameisterschaft 2008 und bei der Weltmeisterschaft 2010 erregte das Oktopus-Orakel Paul große Aufmerksamkeit. Jeweils einige Tage vor dem Spiel wurden zwei gleichartige Deckelboxen aus Plexiglas in das Aquarium gesenkt. Die Boxen enthielten Wasser und gleiches Futter. Auf der Seite des Betrachters waren die Boxen mit der jeweiligen Nationalflagge der beiden Länder beklebt, deren Fußball-Nationalmannschaften gegeneinander antreten sollten. Pauls Futterauswahl galt dann als Vorhersage des späteren Siegers. Bei der Euro 2008 wurde das Orakel zu 7 Spielen befragt, 5 der Voraussagen waren richtig, 2 falsch. Würden Sie Paul aufgrund dieses Stichprobenergebnisses hellseherische Fähigkeiten zusprechen?

a) Geben Sie ein statistisches Modell an, und formulieren Sie einen geeigneten Hypothesentest.

b) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel zum Signifikanzniveau 10% . Welche Aussage ergibt sich aufgrund der beobachteten Werte?

c) Bei der WM 2010 wurde das Orakel erneut zu acht Spielen befragt, diesmal waren alle acht Voraussagen richtig. Welche Aussage liefert der Hypothesentest in diesem Fall?

Lösung:

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \{0, 1, \dots, 7\}$ eine Zufallsvariable, die die Anzahl der richtig geratenen Spiele wiedergibt. Wir nehmen an, dass $X \sim \text{Bin}(7, p)$ für ein $p \in [0, 1]$. Dabei haben wir implizit vorausgesetzt, dass die verschiedenen Ereignisse (Erfolg beim ersten bis siebten Versuch) unabhängig sind, und alle dieselbe Wahrscheinlichkeit p haben. Die Nullhypothese ist dann, dass die Auswahl rein zufällig ist, also

$$H_0 : \ p = 1/2 \quad \text{und} \quad H_1 : p > 1/2.$$

b) Unter der Nullhypothese gilt $X \sim \text{Bin}(7, 1/2)$, also für $k = 0, \dots, 7$,

$$\mathbb{P}_0[X = k] = \binom{7}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{7}{k} 2^{-k}.$$

Wir suchen den maximalen Schwellenwert $c \in \{0, 1, \dots, 7\}$, sodass

$$\mathbb{P}_0[X \geq c] \leq 0,1. \tag{1}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_0[X \geq 7] = \mathbb{P}_0[X = 7] = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} < \frac{1}{10}, \\
&\mathbb{P}_0[X \geq 6] = \mathbb{P}_0[X = 7] + \mathbb{P}_0[X = 6] = \frac{1}{2^7} + \frac{7}{2^7} = \frac{2^3}{2^7} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}, \\
&\mathbb{P}_0[X \geq 5] = \mathbb{P}_0[X = 7] + \mathbb{P}_0[X = 6] + \mathbb{P}_0[X = 5] = \frac{1}{2^7} + \frac{7}{2^7} + \frac{21}{2^7} = \frac{29}{2^7} = \frac{29}{128} > \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Damit ist $c = 6$ die größte Zahl in $\{0, 1, \dots, 7\}$ für die (1) gilt. Entsprechend ist die Entscheidungsregel für den Hypothesentest zum Signifikanzniveau 10%, dass H_0 verworfen wird, wenn die Anzahl der richtig geratenen Spiele größer oder gleich 6 von 7 ist. Während der EM 2008 wurden 5 von 7 Spielen richtig geraten. Somit kann die Nullhypothese H_0 zum Signifikanzniveau von 10% nicht verworfen werden, das heißt wir können nicht ausschließen, dass das Ergebnis rein zufällig ist.

c) Da für $X \sim \text{Bin}(8, p)$ unter der Nullhypothese $p = 1/2$ gilt

$$\mathbb{P}_0[X \geq 8] = \mathbb{P}_0[X = 8] = \frac{1}{2^8} \approx 0,0039,$$

würde der obige Hypothesentest die Nullhypothese zum Signifikanzniveau 10% in diesem Fall verwerfen.