Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

9. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag 9.12., 14 Uhr.

---

1. (Binomialmodell für Aktienkurse) In einem einfachen Finanzmarktmodell wird angenommen, dass der Kurs S_n einer Aktie an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit p um den Faktor $u > 1$ auf den Wert $u \cdot S_n$ steigt, und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ um den Faktor $d < 1$ auf den Wert $d \cdot S_n$ fällt.

Präzisieren Sie die Modellannahmen, und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Kurses S_n nach n Tagen, wenn der Kurs bei $S_0 = 1$ startet.

2. (Exponentielle Abschätzungen)

a) Sei X eine diskrete reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass für alle $c, t \geq 0$ gilt:

$$P[X \geq c] \;\leq\; e^{-ct}\, E\left[e^{tX}\right].$$

b) Es seien nun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1-p$, $0 < p < 1$. Zeigen Sie, dass für $a, t \geq 0$ gilt:

$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right] \;\leq\; \mathrm{e}^{-nat}\, E\left[\mathrm{e}^{tX_1}\right]^n.$$

Beweisen Sie mithilfe dieser Abschätzung die Bernstein-Ungleichung

$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq p+\varepsilon\right] \;\leq\; \mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2} \qquad \text{für alle } \varepsilon \geq 0.$$

3. (Zufällige Polynome) Seien U, V Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1, 1\}$, deren gemeinsame Verteilung bestimmt ist durch

$$P[U=1] \;=\; P[U=-1] \;=\; \frac{1}{2}, \qquad \text{und}$$
$$P[V=1|U=1] \;=\; P[V=-1|U=-1] \;=\; \frac{1}{3}.$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Polynom $x^2 + Ux + V$ mindestens eine reelle Nullstelle?

b) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert der größeren Nullstelle von x^2+Ux+V gegeben es gibt mindestens eine reelle Nullstelle.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Polynom $x^2 + (U+V)x + U + V$ mindestens eine reelle Nullstelle?

4. (Irrfahrten und Wahlauszählungen; optional) Seien X_i $(i \in \mathbb{N})$ unabhängige und auf $\{-1, +1\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die symmetrische Irrfahrt $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ auf $\mathbb{Z}$. Für $\lambda \in \mathbb{Z}$ sei

$$T_\lambda(\omega) \;=\; \min\{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) = \lambda\}.$$

Für $\lambda \neq 0$ ist T_λ der *Zeitpunkt des ersten Besuchs* in λ, und T_0 ist die *erste Rückkehrzeit zum Startpunkt*. Im Vorlesungsskript wird mithilfe des Reflektionsprinzips gezeigt, dass für $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen gelten:

$$P[T_\lambda \le n] \;=\; P[S_n \ge \lambda] + P[S_n > \lambda], \tag{1}$$

$$P[T_\lambda = n] \;=\; \frac{1}{2}\left(P[S_{n-1} = \lambda - 1] - P[S_{n-1} = \lambda + 1]\right) \tag{2}$$

a) Lesen Sie sich den Abschnitt im Vorlesungsskript durch, und erklären Sie die Beweisidee für die Gleichungen (1) und (2) anschaulich.

b) Zeigen Sie für $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$P[T_0 > n \text{ und } S_n = \lambda] \;=\; P[T_\lambda = n] \;=\; \frac{\lambda}{n}\, P[S_n = \lambda].$$

c) Bei einer Wahl erhält Kandidat A α Stimmen und Kandidat B β Stimmen, wobei $\beta < \alpha$. Angenommen, die Stimmen werden in „völlig zufälliger" Reihenfolge ausgezählt. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass A während der Stimmenauszählung stets in Führung liegt, beträgt $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.