Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

8. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt”

Abgabe bis Donnerstag 2.12., 14 Uhr.

---

1. (Ziehen ohne Zurücklegen) Es werden zwei Spielkarten nacheinander aus einem Skatblatt mit 32 Karten gezogen. Seien X und Y die Zufallsvariablen, die den Ausgang des ersten und zweiten Zuges beschreiben.

a) Geben sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und definieren Sie die beiden Zufallsvariablen X und Y.

b) Sind X und Y unabhängig?

c) Betrachten Sie die Ereignisse $A :=$ “die erste Karte ist ein Bube” und $B :=$ “die zweite Karte ist Karo”. Sind diese beiden Ereignisse unabhängig?

2. (Geburtenverteilung) Angenommen, die Gesamtzahl G der Geburten pro Woche in einem Krankenhaus ist Poissonverteilt mit Parameter λ. Weiterhin sei jede Geburt, unabhängig von anderen Geburten und von der Gesamtzahl der Geburten, mit Wahrscheinlichkeit p ein Junge, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ ein Mädchen. Wir beschreiben die Anzahl der pro Woche geborenen Jungen bzw. Mädchen durch Zufallsvariablen J und M. Zeigen Sie

$$P[J = j, M = m] \;=\; \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda p}}{j!} \cdot \frac{(\lambda q)^m e^{-\lambda q}}{m!} \;,$$

und folgern Sie, dass J und M unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λp bzw. λq sind.

3. (Der zweite Erfolg)

a) Seien S und T zwei unabhängige, zum Parameter $p \in (0, 1)$ geometrisch verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung von $S + T$.

b) Für eine Folge unabhängiger Münzwürfe mit einer gezinkten Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ “Kopf” anzeigt, sei T_2 die Wartezeit auf den zweiten Wurf mit “Kopf”. Bestimmen Sie die Verteilung von T_2 auf zwei verschiedene Arten.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von T_2.

4. (Gemeinsame Verteilungen beim Würfeln) Seien X und Y die Augenzahlen beim Werfen zweier Würfel, und seien $N = \min(X, Y)$, $M = \max(X, Y)$ und $S = X + Y$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungen von N und S.

b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Verteilungen von

(i) X und N, (ii) N und M, (iii) M und S,

und stellen Sie diese tabellarisch dar.

c) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen N, M und S.

d) Führen Sie das Zufallsexperiment 100 Mal durch, und bestimmen Sie die gemeinsame empirische Verteilung von X und Y.

5. (Unabhängigkeit und Zahlentheorie) Sei $s > 1$. Die *Riemannsche Zeta–Funktion* ist definiert durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Sei X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und Verteilung

$$P[X = n] = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

Sei E_m das Ereignis "X ist teilbar durch m". Zeigen Sie:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $P[E_m] = m^{-s}$.

b) Die Ereignisse E_p, wobei p eine Primzahl ist, sind unabhängig.

c) Berechnen Sie $P\big[\bigcap_{p \text{ Primzahl}} E_p^c\big]$, und folgern Sie die *Eulersche Formel*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ Primzahl}} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big).$$