Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

7. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag 25.11., 14 Uhr, in den Postfächern im Erdgeschoss des Mathematikzentrums (gegenüber der Bibliothek).

---

1. (Münzwürfe) Eine Münze zeigt „Kopf" mit Wahrscheinlichkeit p. Sei q_n die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl von „Kopf" nach n Würfen gerade ist. Zeigen Sie, dass

$$q_{n+1} \;=\; (1-p)q_n \;+\; p(1-q_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, und berechnen Sie q_n.

2. (Hardy-Weinberg-Gesetz der Populationsgenetik) Ein Pflanzen-Gen besitze die beiden Allele A und a. Ein klassisches Verfahren zur Züchtung von Pflanzen vom Genotyp AA bzw. aa ist die Selbstbefruchtung.

a) Begründen Sie anhand eines geeigneten Modells, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\pi(x,y) \;:=\; P\big[\,\text{Genotyp } y \text{ in Generation } n+1 \,|\, \text{Genotyp } x \text{ in Generation } n\,\big]$$

durch $\pi(aa,aa) = \pi(AA,AA) = 1$, $\pi(Aa,AA) = \pi(Aa,aa) = 1/4$ und $\pi(Aa,Aa) = 1/2$ gegeben sind.

b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichte der Dynamik.

c) Berechnen Sie für beliebiges n die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\pi^n(Aa,Aa) \;=\; P\big[\,Aa \text{ in Generation } n \,|\, Aa \text{ am Anfang}\,\big].$$

d) Der Genotyp zu Beginn sei durch zufälliges Entnehmen einer einzelnen Stichprobe aus einer Population gegeben, in der der Anteil des Allels A unter allen Allelen 20% beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich nach hinreichend vielen Generationen der Genotyp AA einstellt ?

3. (Gleichgewichte von Markovketten) Sei π die Übergangsmatrix einer Markovkette $X_0, X_1, X_2, \ldots$ auf einem endlichen Zustandsraum S. Zeigen Sie:

a) Ist die Startverteilung μ ein Gleichgewicht für π, dann gilt $X_k \sim \mu$ für alle Zeitpunkte.

b) Erfüllt μ die *detailled balance* Bedingung,

$$\mu(x)\pi(x,y) = \mu(y)\pi(y,x) \qquad \text{für alle } x, y \in S,$$

dann ist μ ein Gleichgewicht.

c) Bestimmen Sie ein Gleichgewicht der Markovkette auf $S := \{0,1\}^3$ mit Übergangsmatrix

$$\pi(x,y) := \begin{cases} 1/3 & \text{falls } |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3| = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

4. (Tom Bayes in Bandrika) Tom Bayes befindet sich auf seiner Bandrika-Reise genau in der Situation, wie Sie in *Aufgabe 2 vom 6. Übungsblatt*. Im Gegensatz zu Ihnen geht er jedoch davon aus, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε korrekt ist. Zeigen Sie:

a) Egal welche Antwort Tom auf seine erste Frage bekommt, glaubt er weiterhin, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε richtig ist.

b) Sind die ersten beiden Antworten identisch (OO oder WW), so glaubt Tom immer noch, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε richtig ist.

c) Nach drei gleichen Antworten beurteilt Tom die Situation folgendermaßen:

$$P\big[\,\text{Osten ist korrekt}\,|\,\text{OOO}\,\big] = \frac{9\varepsilon}{11-2\varepsilon}, \quad P\big[\,\text{Osten ist korrekt}\,|\,\text{WWW}\,\big] = \frac{11\varepsilon}{9+2\varepsilon}$$

5. (Steuerprogression) In der Tabelle unten wird der Anteil der Einkommenssteuer in Abhängigkeit vom Jahreseinkommen in den USA für die Jahre 1974 und 1978 verglichen.

a) Was fällt auf? Stellen Sie einen Zusammenhang zur Vorlesung her. Präzisieren Sie den Zusammenhang, indem Sie ein geeignetes mathematisches Modell angeben.

b) Entwickeln Sie dazu eine Aufgabenstellung oder eine Unterrichtsplanung für den Schulunterricht in der Oberstufe.

Jahreseinkommen (pro Person in $)	Einkommen (in 1000 $)	gezahlte Steuer (in 1000 $)	durchschnittlicher Steueranteil
1974			
< 5000	41 651 643	2 244 467	5,4%
5000 bis 9999	146 400 740	13 646 348	9,3%
10000 bis 14999	192 688 922	21 449 597	11,1%
15000 bis 99999	470 010 790	75 038 230	16,0%
≥ 100000	29 427 152	11 311 672	38,4%
Insgesamt	880 179 247	123 690 314	14,1%
1978			
< 5000	19 879 622	689 318	3,5%
5000 bis 9999	122 853 315	8 819 461	7,2%
10000 bis 14999	171 858 024	17 155 758	10,0%
15000 bis 99999	865 037 814	137 860 951	15,9%
≥ 100000	62 806 159	24 051 698	38,3%
Insgesamt	1 242 434 934	188 577 186	15,2%