Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

6. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag 18.11., 14 Uhr, in den Postfächern im Erdgeschoss des Mathematikzentrums (gegenüber der Bibliothek).

---

1. (Überbuchungen) 4% aller Fluggäste, die Plätze reservieren, erscheinen nicht. Die Fluggesellschaft weiß dies und verkauft 75 Flugkarten für 73 verfügbare Plätze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Fluggäste Platz bekommen? Lösen Sie die Aufgabe exakt und mit Poisson-Näherung.

2. (Bandrika) Sie haben sich im Nationalpark von Bandrika verlaufen. Von den Besuchern im Park sind zwei Drittel Touristen. Fragen nach der Richtung werden von diesen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ richtig beantwortet. Dabei sind Antworten auf wiederholte Fragen unabhängig, auch wenn die Frage und die Person dieselben sind. Wenn man hingegen eine Bandrikanerin oder einen Bandrikaner fragt, ist die Antwort immer falsch.

a) Sie fragen eine Person, ob der Ausgang sich in Richtung Osten oder Westen befindet. Als Antwort erhalten Sie Osten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtig ist?

b) Sie fragen dieselbe Person nochmals und bekommen dieselbe Antwort. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, nun die richtige Antwort erhalten zu haben, $\frac{1}{2}$ beträgt.

c) Sie richten dieselbe Frage ein drittes Mal an dieselbe Person und erhalten wieder die Antwort Osten. Wie hoch ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort stimmt?

d) Ein viertes Mal wird die geduldige Person von Ihnen gefragt, doch die Antwort ist wieder Osten. Zeigen Sie, dass die Antwort mit Wahrscheinlichkeit $\frac{27}{70}$ richtig ist.

e) Zeigen Sie für den Fall, dass die vierte Antwort Westen wäre, dass die Richtung Osten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ zutrifft.

3. (Modellieren mit bedingten Wahrscheinlichkeiten)

a) Auf einer Ausstellung sind von zwölf Gemälden zehn Originale und zwei Fälschungen. Ein Besucher wählt zufällig ein Bild aus, befragt aber, bevor er es kauft, eine Expertin nach deren Meinung. Diese gibt in neun von zehn Fällen eine richtige Beurteilung ab, unbeeinflusst davon, ob das vorgelegte Bild ein Original oder eine Fälschung ist. Die Expertin urteilt, dass das Bild eine Fälschung sei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Original?

b) Der Besucher gibt das Bild zurück und wählt ein anderes. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses ein Original?

b) Eine Fabrik stellt Lampen her, von denen jedes Fabrikat genau einen Lichtschalter besitzt. Dieser Schalter wird von zwei Firmen, A und B, bezogen, wobei 60% aller Schalter von A und 40% aller Schalter von B stammen. Erfahrungsgemäß sind 5% aller A-Schalter und 2% aller B-Schalter defekt. Die Endkontrolle der Fabrik akzeptiert jeden intakten Schalter und fälschlicherweise auch 5% aller defekten Schalter. Modellieren Sie die o.b. Situation durch ein geeignetes mehrstufiges Experiment. Bestimmen Sie in diesem Modell die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät in den Verkauf gelangt und einen defekten Schalter besitzt.

4. (Polyas Urnenmodell) Eine Urne enthält zur Zeit $n = 0$ je eine rote und eine schwarze Kugel. Vor jedem Zeitpunkt $n = 1, 2, 3, \ldots$ wird eine zufällig ausgewählte Kugel entnommen und zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Sei $R_n(\omega)$ die Anzahl der roten Kugeln zur Zeit n. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen R_n

a) für die Fälle $n = 1, 2$ und 3,

b) für den allgemeinen Fall.

5. (Runs beim Münzwurf II) Seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ unabhängige Münzwürfe mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ für "Zahl" und Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ für "Wappen".

a) Geben Sie explizit einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, auf dem die Zufallsvariablen realisiert werden können.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mit Z_i ein neuer Run beginnt, vgl. die Aufgabe 1b) vom 4. Übungsblatt.

c) Folgern Sie: Für die Anzahl Y aller Runs gilt

$$\mathbb{E}[Y] = 1 + 2pq(n - 1).$$