Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

5. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag 11.11., 14 Uhr, in den Postfächern im Erdgeschoss des Mathematikzentrums (gegenüber der Bibliothek).

---

1. (Glücksspiele)

a) Ihnen wird folgendes Spiel angeboten: Sie dürfen eine faire Münze (Zahl/Wappen) 5 mal werfen. Erscheint in jedem Wurf Wappen, so gewinnen Sie 35€. Erscheint in genau 4 Würfen Wappen, so werden Ihnen 12€ ausbezahlt und fällt genau drei mal Wappen bekommen Sie immerhin noch 6€. Würden Sie dieses Spiel für einen Einsatz von 5€ pro Spiel einen ganzen Abend lang spielen?

b) Beim Spiel *chuck-a-luck* leistet ein Spieler einen Euro Einsatz, nennt eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 6$ und wirft dann drei faire Würfel. Zeigt mindestens einer der Würfel seine Zahl, so erhält er den Einsatz zurück und außerdem für jeden Würfel, der seine Zahl zeigt noch einen zusätzlichen Euro. Erscheint die genannte Zahl nicht, so verfällt der Einsatz. Es heißt, der Bankvorteil bei diesem Spiel betrüge 7,9%. Was meinen Sie hierzu?

2. (Erwartungswert von positiven Zufallsvariablen mit ganzzahligen Werten)

a) Sei T eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}_+$. Zeigen Sie, dass

$$E[T] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} P[T \geq k].$$

b) Berechnen Sie, wieviele Würfe im Schnitt nötig sind, bis beim Würfeln mit einem fairen Würfel zum ersten Mal eine 6 fällt.

3. (Münzwürfe)

a) Zeigen Sie, dass die Varianz einer diskreten reellwertigen Zufallsvariable X mit $E[|X|] < \infty$ durch

$$\mathrm{Var}[X] \;=\; E[X^2] - E[X]^2 \qquad \text{gegeben ist.}$$

b) Zehn Personen sitzen in einem Kreis, und jeder wirft eine faire Münze. Sei N die Anzahl der Personen, deren Münze die gleiche Seite wie die Münzen beider Nachbarn zeigt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P[N = 9]$ und $P[N = 10]$, sowie den Erwartungswert $E[N]$.

c) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}[N]$.

4. (Stochastische Simulation: Das direkte Verfahren) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $U : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *reellwertige Zufallsvariable*, falls die Menge $\{U \leq c\} = \{\omega \in \Omega : U(\omega) \leq c\}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthalten ist. Die Zufallsvariable heißt *gleichverteilt auf dem Intervall* $(0, 1)$, falls

$$P[U \leq c] \;=\; c \qquad \text{für alle } c \in (0,1) \text{ gilt.}$$

a) Sei $p : \mathbb{N} \to [0, 1]$ die Massenfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den natürlichen Zahlen, und $F : \mathbb{Z}_+ \to [0, 1]$ die durch

$$F(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} p(i)$$

definierte *kumulative Verteilungsfunktion*. Zeigen Sie: Ist $U : \Omega \to (0, 1)$ gleichverteilt, dann wird durch

$$X = n \;:\Leftrightarrow\; F(n-1) < U \leq F(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

eine Zufallsvariable mit Massenfunktion p definiert.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der aus einer auf $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariable eine Zufallsvariable mit Massenfunktion p erzeugt.

c) Bestimmen Sie die mittlere Anzahl von Schritten, die der Algorithmus durchläuft. Wie aufwändig ist es, auf diese Weise eine Zufallsstichprobe von einer Poisson(λ)-Verteilung zu simulieren ?