**Institut für Angewandte Mathematik**
**Wintersemester 2021/22**
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

# 4. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

**Abgabe bis Donnerstag 4.11., 14 Uhr, in den Postfächern im Erdgeschoss des Mathematikzentrums (gegenüber der Bibliothek).**

---

**1. (Wartezeiten und Runs)**

a) Bestimmen Sie die Verteilung der Wartezeit $T$ auf die erste 6 bei wiederholtem Würfeln mit einem fairen Würfel.

b) In manchen Anwendungen möchte man testen, ob eine Bitfolge

$$\omega \;=\; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$$

„rein zufällig" zustande kam oder nicht. Eine Kenngröße, mit der man quantifizieren kann, ob die Nullen und Einsen sehr gleichmäßig verteilt sind oder eher in wenigen Gruppen (runs) vorkommen, ist die Zahl

$$V(\omega) \;:=\; |\{i \in \{2, \ldots, n\} : x_i \neq x_{i-1}\}|.$$

Beispielsweise ist $V\big((1,1,1,1,0,0,0,0)\big) = 1$ und $V\big((1,0,1,0,1,0,1,0)\big) = 7$.

Sei $P$ die Gleichverteilung auf $\{0,1\}^n$. Zeigen Sie, dass

$$P[V = k] \;=\; 2^{-(n-1)} \binom{n-1}{k}.$$

c) Bestimmen Sie $V(\omega)$ für die fünf Datensätze aus der Einleitung des Vorlesungsskripts (Beispiel 0-1 Zufallsfolgen), und für eine von Ihnen selbst erstellte „möglichst zufällige" Folge. Wie können Sie beurteilen, ob die Folgen hinsichtlich der Runs echten Zufallsfolgen ähnlich sind?

**2. (Erwartungswerte beim Würfeln)** Geben Sie geeignete Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen an, und berechnen sie die Verteilungen und Erwartungswerte für

a) die Augenzahl beim Werfen eines fairen Würfels,

b) die maximale Augenzahl beim Werfen von zwei fairen Würfeln,

c) das Produkt der Augenzahlen beim Werfen von zwei fairen Würfeln.

**3. (Zufallsstichproben mit und ohne Zurücklegen)** Eine Prüfung besteht aus 12 Fragen, die mit *ja* oder *nein* zu beantworten sind. Sie gilt bei mindestens 8 richtigen Antworten als bestanden.

a) Ein Student kreuzt auf gut Gück die Antworten an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er die Prüfung?

b) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn er 2 Fragen mit Sicherheit beantworten kann und nur den Rest zufällig ankreuzt?

c) Falls er gar nichts weiß, wäre es dann für ihn günstiger, zufällig 6-mal *ja* und 6-mal *nein* anzukreuzen, vorausgesetzt, dass für 6 Fragen die richtige Antwort *ja* lautet?

**4. (Geburten)** Im 18. Jahrhundert wurden in London in 82 aufeinander folgenden Jahren mehr Jungen als Mädchen geboren. Da Jungen und Mädchen mit ungefähr (aber nicht genau) gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden, scheint das ein sehr unwahrscheinliches Ereignis zu sein, das der göttlichen Vorsehung zugeschrieben wurde. Ist das wirklich so? Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass jede Geburt unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.485$ ein Mädchen ergibt (und vernachlässigen Sie die Möglichkeit von Zwillingen usw.).

a) Zeigen Sie: die Wahrscheinlichkeit, dass in $2n$ Geburten mehr Mädchen als Jungen geboren werden ist nicht größer als

$$\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \frac{1-p}{1-2p} \, .$$

b) Angenommen, in 82 aufeinander folgenden Jahren werden jedes Jahr 20.000 Kinder geboren. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Jahr mehr Jungen als Mädchen geboren werden ist mindestens $0,99$.

*Hinweis: Sie können die Stirlingsche Formel benutzen:*

$$1 \;\le\; \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} \;\le\; e^{1/(12n)} \, .$$

**5. (Binomial-Approximation der Hypergeometrischen Verteilung)**

a) Geben Sie die Massenfunktionen der Binomialverteilung mit Parametern $n$ und $p$ und der hypergeometrischen Verteilung mit Parametern $n$, $m$ und $r$ an (Bezeichnungen wie in der Vorlesung).

b) Zeigen Sie: Für $m \to \infty$ und $r \to \infty$ mit $p = \frac{r}{m}$ konstant konvergiert die hypergeometrische Verteilung gegen die Binomialverteilung mit Parametern $n$ und $p$.

c) Interpretieren Sie diese Aussage.