Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

3. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag 28.10., 14 Uhr, in den Postfächern im Erdgeschoss des Mathematikzentrums (gegenüber der Bibiothek).

Geben Sie bei den stochastischen Modellierungsaufgaben den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum genau an, und leiten Sie die Aussagen aus den Modellannahmen her !

1. (Münzwürfe)
Eine faire Münze wird n mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlickeit, dass beim n-ten Wurf

a) Kopf zum ersten mal eintritt,

b) die Anzahl von Kopf und Zahl gleich ist,

c) genau zweimal Kopf eingetreten ist,

d) mindestens zweimal Kopf eingetreten ist.

2. (Bonferroni's Ungleichung und das Sammelbilderproblem)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ Ereignisse.

a) Zeigen Sie, dass

$$P\Big[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big] \;\geq\; \sum_{i=1}^{k} P[A_i] - \sum_{1\leq i<j\leq k} P[A_i \cap A_j].$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $k = 2$ und $k = 3$. Im allgemeinen Fall kann man die Aussage zum Beispiel mit vollständiger Induktion zeigen.

b) In jeder Packung Corn Flakes befindet sich je eines von insgesamt n verschiedenen Bildern von Fußballspielern, darunter auch 11 Bilder von Spielern aus der Nationalmannschaft. Wer nun die Bilder aller 11 Nationalspieler gesammelt hat, gewinnt eine Reise zur Weltmeisterschaft. Um die Reise auf jeden Fall zu gewinnen, kauft Fred Feuerstein $3n$ Packungen.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich die gewünschten Bilder zu erhalten, zwischen $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n}$ und $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n} + 55 \cdot (1 - \frac{2}{n})^{3n}$ liegt. Welchen Wert haben diese Schranken ungefähr für große n?

3. (Gerüchte)
In einer Stadt mit $n+1$ Einwohnern erzählt eine Person einer zweiten ein Gerücht, diese ihrerseits erzählt es erneut weiter, usw. Bei jedem Schritt wird der ,,Empfänger" zufällig unter den n möglichen Personen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt (- gelegentlich erzählt also auch jemand das Gerücht derselben Person, von der er es gehört hat). Das Gerücht wird auf diese Weise r mal weiter erzählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a) es nicht zum Urheber zurückkommt,

b) es keiner Person zweimal erzählt wird.

c) Setzen Sie im Ergebnis von a) insbesondere $r = n + 1$, und berechnen Sie den Limes für $n \to \infty$.

4. (σ-Algebren)

a) Geben Sie alle auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ möglichen σ-Algebren an.

b) Finden Sie jeweils die kleinste σ-Algebra auf Ω, welche $\mathcal{M}$ enthält:

   i) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\},\ \mathcal{M} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$.
   ii) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ \mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$.
   iii) $\Omega = \{0, 1\}^4,\ \mathcal{M} = \{\{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1\}, \{\omega \in \Omega : \omega_2 = 1\}\}$.
   iv) $\Omega = [0, 1],\ \mathcal{M} = \{\{x\} : x \in [0, 1]\}$.