Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

2. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag 21.10., 18 Uhr, in den Postfächern im Erdgeschoss des Mathematikzentrums (gegenüber der Bibiothek).

---

1. (Ereignisse als Mengen)
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, und seien $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse. Was bedeuten (mit Begründung) die folgenden Ereignisse anschaulich?

$$\text{a) } A \cap B \qquad \text{b) } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{c) } \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Sei nun speziell $\Omega = \big\{\omega = (x_1, x_2, \dots) \ \mid \ x_i \in \{-1, +1\}\big\}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$S_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \omega = (x_1, x_2, \dots) \in \Omega.$$

Was bedeuten die den folgenden Mengen zugeordneten Ereignisse anschaulich?

$$\text{d) } S_n^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \qquad \text{e) } \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} S_m^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$$

2. (Kolmogorovsche Axiome)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

a) Es gelte $P[A] = \frac{3}{4}$ und $P[B] = \frac{1}{3}$. Zeigen Sie $\frac{1}{12} \leq P[A \cap B] \leq \frac{1}{3}$, und demonstrieren Sie anhand von Beispielen, dass beide Extremfälle eintreten können.

b) Zeigen Sie, dass $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$ ist.

c) Ist $A \cup B = \Omega$, dann gilt $P[A \cap B] = P[A]\, P[B] - P[A^c]\, P[B^c]$.

3. (Gleichverteilung)

a) Sei Ω eine endliche Menge. Definieren Sie die Gleichverteilung P auf Ω, und zeigen Sie durch Überprüfen der Axiome, dass P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

b) Zeigen Sie: Die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen (also die Anzahl der Möglichkeiten aus n Objekten k auszuwählen, wobei die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird), ist gleich

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}.$$

c) In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K rot sind. Wir ziehen n Kugeln ohne Zurücklegen. Beschreiben Sie dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe genau k rote Kugeln enthält, ist

$$\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}.$$

4. (Geburtstagsparadox) In einer Klasse sind n Schüler.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, dass mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben? Berechnen Sie p_{22} und p_{23} explizit. Dabei sei vereinfachend angenommen, dass kein Schüler am 29. Februar geboren ist und alle anderen Geburtstage gleich wahrscheinlich sind. *(Hinweis: Betrachten Sie das Gegenereignis.)*

b) Zeigen Sie unter Verwendung der Ungeichung $1 - x \leq \exp(-x)$, dass

$$p_n \geq 1 - \exp\big(-\, n(n-1)/730\,\big).$$

Welche untere Schranke ergibt sich für p_{30}?