Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

UNIVERSITÄT BONN IAM

14. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag 27. Januar, 14 Uhr.

---

1. (σ-Regeln)

a) Leiten Sie die in Abbildung 1 aufgeführten σ-Regeln aus dem Satz von De Moivre–Laplace her.

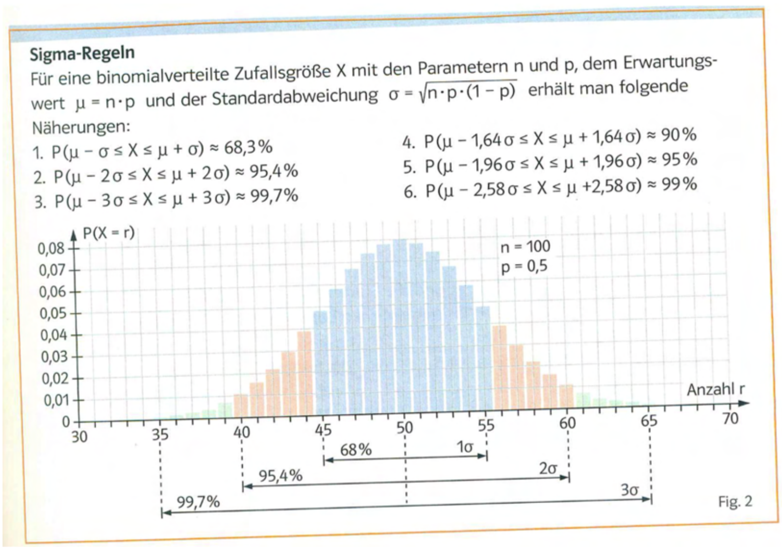

Abbildung 1: Auszug aus dem Lambacher Schweizer.

b) Ein fairer Würfel wird 12.000 mal geworfen. Sei S die Anzahl der Sechsen, die dabei fallen. Bestimmen Sie a und b mit

$$\mathbb{P}[1900 < S < 2200] \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$

2. (Überbuchungen und Werbegeschenke)

a) Ein Hotel hat 200 Betten. Wie viele Reservierungen darf der Hotelmanager akzeptieren, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit 20 % Wahrscheinlichkeit annulliert wird, und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens $2,5\,\%$ sein soll?

b) Frank betreibt am kommenden Wochenende einen Messestand und weiß, dass ihn dort 1.000 Personen besuchen werden, denen er allen ein T-Shirt zu Werbezwecken schenken möchte. Es gibt jeweils eine Version für Frauen und eine für Männer, allerdings weiß er nicht, welcher Prozentsatz seiner BesucherInnen weiblich bzw. männlich sein wird. Erfahrungsgemäß ist ihm nur bekannt, dass ca. 30% Frauen und 70% Männer unter den BesucherInnen zu erwarten sind. Vorsorglich hat Frank nun 330 Frauen-T-Shirts und 730 Männer-T-Shirts besorgt. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Frank nicht allen Besuchern ein T-Shirt schenken kann, mithilfe der Čebyšev-Ungleichung nach oben ab, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit approximativ.

3. (Konfidenzintervalle) Ein Fußballfan hat folgenden Verdacht: Diejenige Mannschaft, die per Losentscheid das Elfmeterschießen beginnt, hat bessere Chancen zu gewinnen. Um seine Vermutung zu belegen, betrachtet er die Ergebnisse von 100 Spielen, die durch Elfmeterschießen entschieden wurden. Davon hat die jeweils beginnende Mannschaft 60 Spiele gewonnen. Leiten Sie exakte und approximative Konfidenzintervalle zu den Konfidenzniveaus 80% und 90% für die Wahrscheinlichkeit p her, dass die beginnende Mannschaft gewinnt. Würden Sie der Vermutung auf der Basis dieser Daten zustimmen?

Für die folgenden beiden Aufgaben benötigen Sie die Formel zur Berechnung der Erwartungswerte $E[g(X,Y)]$ für reellwertige Zufallsvariablen X und Y, deren gemeinsame Verteilung absolutstetig mit Dichte f ist. Ist die Funktion $g \cdot f$ integrierbar, dann gilt ähnlich wie im eindimensionalen Fall

$$E[g(X,Y)] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f(x,y)\; dy\; dx\,. \tag{1}$$

4. (Marginaldichten) Es seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) := \begin{cases} x(y-x)\,\mathrm{e}^{-y} & \text{falls } 0 \le x \le y < \infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f tatsächlich eine Dichte ist.

b) Berechnen Sie die Marginaldichten f_X und f_Y.

c) Beweisen oder widerlegen Sie: X und Y sind unkorreliert.

5. (Normalverteilung mit Korrelation) Für ein festes $\rho \in (-1,1)$ seien X und Y zwei reellwertige Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung die folgende Dichtefunktion besitze:

$$f_\rho(x,y) := \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\,\exp\left[-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right].$$

a) Berechnen Sie die Verteilungen von X und Y.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Cov}[X,Y] = \rho$.

c) Finden Sie alle Werte von ρ, für die X und Y unabhängig sind. Beweisen Sie Ihre Behauptung.