**Institut für Angewandte Mathematik**
**Wintersemester 2021/22**
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

# 13. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

**Abgabe bis Donnerstag 20. Januar, 14 Uhr.**

---

**1. (Berechnung von Erwartungswerten und Dichten)**

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ in den folgenden Fällen:

(i) $X$ ist gleichverteilt auf $[0,1]$.

(ii) $X$ ist exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$.

(iii) $X = e^Z$ für eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable $Z$.

(iv) Die Verteilung von X ist absolutstetig mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Sei $Z$ eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Die Verteilung von $X := e^Z$ heißt *log-Normal-Verteilung*. Zeigen Sie, dass diese Verteilung absolutstetig ist, und berechnen Sie die Dichte.

**2. (Momentenerzeugende Funktion)** Die *momenterzeugende Funktion* einer reellen Zufallsvariable $X$ ist definiert durch

$$M(t) = \mathbb{E}[exp(tX)] \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion in den folgenden Fällen:

(i) $X$ ist binomialverteilt zu den Parametern $(n,p)$,

(ii) $X$ ist exponentialverteilt zum Parameter $\lambda$,

(iii) $X$ ist $N(m,\sigma^2)$ verteilt.

b) Wie kann man die Momente $\mathbb{E}[X^n]$ berechnen, wenn man die Funktion $M(t)$ kennt?

**3. (Wartezeiten)** Eine Folge von Ereignissen trete zu zufälligen Zeitpunkten ein. Wir nehmen an, dass die Anzahl der Ereignisse, die sich bis zur Zeit $t > 0$ ereignen, durch eine Poisson($\lambda t$)-verteilte Zufallsvariable $N_t$ beschrieben wird, wobei $\lambda > 0$ ein fester Parameter ist. (Wofür und weshalb ist das eine sinnvolle Modellierungsannahme ?)

a) Sei $T_k$ der Zeitpunkt, zu dem das $k$-te Ereignis eintritt. Zeigen Sie: $T_k$ ist eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_k(t) \;=\; 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \qquad t \geq 0.$$

b) Folgern Sie, dass die Verteilung von $T_k$ absolutstetig ist mit Dichte

$$f_k(t) \;=\; \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\, t^{k-1} e^{-\lambda t}\, 1_{(0,\infty)}(t).$$

c) Skizzieren Sie die Graphen der Dichten für $k = 0, 1, 2, 3$. Was fällt auf?

**4. (Endliche Markovketten)** Wir betrachten zeithomogene Markovketten $(X_n)$ und $(Y_n)$ auf $\{1,2,3\}$ mit Startwert $x_0 \in \{1,2,3\}$ und Übergangsmatrizen

$$\pi := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma := \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie die Asymptotik der Verteilungen der Markovketten für $n \to \infty$.

b) Wie groß ist die asymptotische relative Häufigkeit der Besuche der Markovkette im Zustand 1 ?